Ioan C. POPA

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU TRANSFERT THERMIQUE



Méthode des volumes finis

UNIVERSITARIA
Craiova, 2002

Chapitre 0

Notions fondamentales du transfert thermique

Le concept *d'énergie* est utilisé en thermodynamique pour préciser l'état d'un système. Il est bien connu le fait que l'énergie n'est ni créée ni détruite, mais seulement transformée d'une forme à l'autre. *La science de la thermodynamique* étudie la relation entre la chaleur et d'autres formes d'énergie mais l'objectif de la science du *transfert de chaleur (du transfert thermique*) est l'analyse du taux de transfert thermique ayant lieu dans un système. L'énergie transférée par transfert de chaleur n'est pas directement mesurable mais peut être appréciée par une quantité mesurable appelée *la température*. On a constaté par des observations expérimentales que lorsque dans un système il y a une différence de température, un flux de chaleur (flux thermique) apparaît et il est orienté de la région à haute température vers la région à basse température. Lorsqu'il y a un flux thermique dans un système, un gradient de température y est présent également. La connaissance de la distribution de la température dans un système est nécessaire dans l'étude du transfert thermique.

Les problèmes de transfert thermique jouent un grand rôle dans les applications techniques, soit que les échanges doivent être importants et rapides, soit que, au contraire, on cherche à obtenir un excellent isolement thermique, soit encore que l'on veuille thermostater avec précision un système. En électrotechnique, par exemple, la connaissance de la distribution de la température détermine les contraintes thermiques, dans un équipement électrique, qui sont nécessaires au dimensionnement des différents éléments (voies de courant, chambre de coupure, contacts électriques, etc.)

Dans l'étude du transfert thermique on distingue trois modes de transmission de la chaleur: la conduction, la convection et le rayonnement. Le premier phénomène, la conduction, a lieu dans les solides. La convection se rencontre spécialement dans les fluides. L'apport de chaleur par rayonnement peut avoir lieu dans tous les milieux transparents aux ondes électromagnétiques. En réalité la distribution de la température, dans un milieu, est la conséquence des effets de ces trois modes de transfert thermique ; il est impossible d'isoler un mode de transfert thermique d'un autre mode. Pourtant, pour la simplicité de l'étude, on considère ces modes de transfert thermique séparément. Par exemple, on peut étudier la conduction couplée avec la convection et on néglige le rayonnement.

Une grandeur souvent utilisée dans l'étude du transfert thermique est la densité du flux thermique qui représente la chaleur traversant l'unité de surface et par unité de temps.

0.1 Conduction

La conduction thermique est le phénomène de transport de la chaleur mis en jeu dans les solides ; elle est également présente dans les liquides immobiles et à un moindre degré dans les gaz. Le phénomène microscopique (à l'échelle atomique) intervenant dans la conduction thermique est la propagation de l'agitation thermique des particules des zones plus chaudes vers celles des zones plus froides. Le mécanisme microscopique consiste dans la vibration moléculaire ou atomique (liquides, gaz) et la vibration cristallin ainsi que dans le déplacement des électrons libres (métaux). La conduction thermique est donc le phénomène par lequel l'énergie est transférée des zones à haute température vers des zones à basse température.

La loi de Fourier (pour un milieu isotrope, à travers une surface isotherme) montre que le flux thermique, par conduction, dans une direction donnée est proportionnel à l'aire A normale à la direction du flux thermique et au gradient de température à cette direction. Le flux thermique, dans la direction x, par exemple, conformement à la loi de Fourier est donné par la relation :

$$Q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} A \qquad [\text{ W }] \tag{1}$$

ou si l'on exprime la densité du flux thermique :

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx} \qquad [\text{ W/m}^2]. \tag{2}$$

Le coefficient de proportionnalité λ, appelé *coefficient de conductivité thermique*, dépend de la substance (nature, structure, température, pression, densité, etc.) ; il se mesure en $Wm^{-1}K^{-1}$ et il est toujours positif car la chaleur se transmet des zones chaudes vers les zones froides. Si la température décroît dans la direction positive x, alors dT/dx est négatif. Le flux thermique Q_x et la densité du flux thermique q_x étant des quantités positives dans la direction positive x, alors il est nécessaire d'introduire le signe moins dans le membre droite des expressions (1) et (2). Si le membre droite des expressions (1) et (2) est négatif alors le flux thermique (et également la densité du flux thermique) est orienté dans la direction négative x.

Dans le cas général, dans l'espace à plusieurs dimensions, la loi de Fourier est donnée par la relation :

$$Q = -\lambda \nabla T \vec{A}, \tag{3}$$

où $\vec{A}$ est le vecteur normal à l'aire A. La densité du flux thermique est :

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T . \tag{4}$$

En général la conductivité thermique λ varie en fonction de la température. À des basses températures, cette variation peut être négligée.

Exemple 0.1

Déterminer la densité du flux thermique q et le flux thermique Q à travers une plaque, ayant l'aire transversale $A = 0.5\,\text{m}^2$ et l'épaisseur $L = 0.02\,\text{m}$ ($\lambda = 70\,\text{W/mK}$) quand ses surfaces sont maintenues aux températures $T_1 = 60\,^{\circ}C$ et $T_2 = 20\,^{\circ}C$ respectivement.

Solution

Si le gradient de température dT/dx est constant alors la distribution de la température $T(x)$ dans la plaque est linéaire (fig.1).

Si l'on applique la relation (2), la densité du flux thermique q est :

$$q = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} = -70 \frac{20 - 60}{0.02} = 140\,\text{kW/m}^2 .$$

La densité du flux thermique est orienté dans la direction positive x et la valeur est aussi positive. En appliquant la relation (1) on obtient le flux thermique :

$Q = qA = 140 \cdot 0.5 = 70\ \text{kW}$.

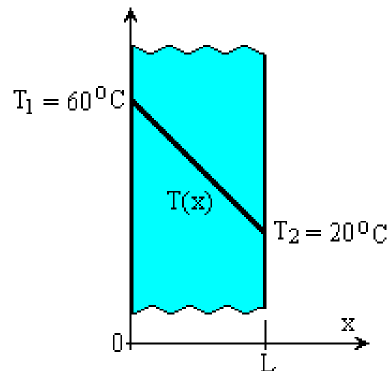


Fig. 0.1 *Conduction thermique dans une plaque.*

0.2 Convection

Dans le cas d'un écoulement d'un fluide en contact avec une paroi solide, s'il y a une différence de température entre la paroi et le fluide, il y a alors un transfert thermique entre le fluide et la paroi comme une conséquence du mouvement du fluide par rapport à la surface de la paroi. Ce phénomène de transfert de chaleur est appelé *convection.* La propagation de la chaleur est réalisée par transport des particules. Il existe deux types de transport :

• *naturel (libre)*, dû aux différences de densité qui sont générées par les gradients de température (si le fluide est isotherme, il n'y a pas de mouvement) ;

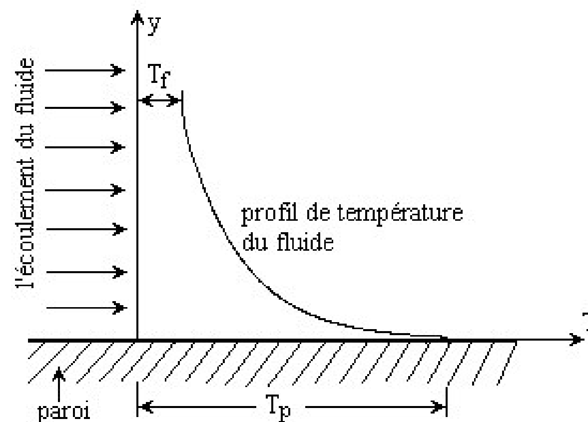


Fig. 0.2 *Transfert thermique par convection entre la paroi chaude et le fluide froide.*

• *forcé*, dû à l'action mécanique (ventilateur, etc.).

Pour permettre ce type de transport, la matière doit donc se déplacer facilement.

Le phénomène de *convection libre* se rencontre couramment lorsque le fluide s'étant échauffé au contact d'un corp chaud, qui s'élève et est remplacé par le fluide froid. Le

mouvement du fluide a lieu à cause de la différence de densité. Lorsque le fluide est mis mécaniquement en mouvement, il y a *convection forcée*.
La densité du flux thermique q est donné par la *loi de Newton* :

$$q = h_c \left(T_p - T_f\right), \tag{5}$$

où h_c, appelé coefficient de convection (voir l'annexe F), en $\mathrm{W/m^2}K$, dépend d'un grand nombre de facteurs et en particulier de l'écart de température $\Delta T = T_p - T_f$ entre le solide et le fluide.

0.3 Rayonnement

Tous les corps émettent de l'énergie à cause de leur température et cette énergie émise s'appelle *le rayonnement thermique*. L'énergie rayonnée par un corps est émise dans l'espace sous forme d'ondes électromagnétiques selon la théorie de Maxwell (la théorie classique des ondes électromagnétique) ou sous forme discrète de photons selon les hypothèses de Planck. Les deux concepts ont été utilisés pour l'étude du transfert thermique par rayonnement. On peut donner des exemples de rayonnement : le rayonnement solaire, le rayonnement d'un radiateur infrarouge, d'un filament d'une lampe à incandescence, le rayonnement de l'arc électrique, etc.

L'émission ou l'absorption de l'énergie de rayonnement par un corps est un processus en bloc ; c'est-à-dire, le rayonnement provenant de l'intérieur du corps est émis par la surface. Réciproquement, l'incident de rayonnement sur la surface d'un corps pénètre à la profondeur du milieu où il est atténué sur une distance très courte de la surface, on peut parler donc du rayonnement comme étant absorbé ou émis par la surface. Par exemple, le rayonnement incident sur une surface en métal est atténué sur une distance de quelques angströms de la surface; par conséquent les métaux sont opaques du point de vue thermique au rayonnement. Tous les corps qui émettent du rayonnement absorbent également celui qu'ils reçoivent. Certains corps absorbent intégralement le rayonnement incident ; ils sont appelés "*corps noirs*" et constituent donc le radiateur idéal. D'autres corps, les "*corps gris*", n'absorbent qu'une fraction du rayonnement incident.

0.3.1 L'émission du rayonnement

La densité maximum du flux thermique émise par un corp à la température T est donné par la *loi de Stefan-Boltzmann* :

$$P_r = \sigma T^4, \tag{6}$$

où T est la température absolue en K, σ est la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5.6697 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}K^4$) et P_r est appelée *la puissance émissive du corp noir.* Seulement un “ *radiateur idéal* ” ou le “ *corp noir* ” peut émettre un flux thermique en concordance avec la relation (6). Le flux thermique émis par un *radiateur réel,* à la température T est plus petit que le flux thermique donné par la relation (6) et il s'exprime ainsi :

$$q = \varepsilon P_r = \varepsilon\sigma T^4, \tag{7}$$

où ε est l'émissivité qui varie entre 0 et 1 (pour tous les corps réels ε est inférieure à 1).

0.3.2 L'absorption du rayonnement

Si un flux thermique de rayonnement q_{inc} est incident au corp noir, alors celui-ci est totalement absorbé par le corps noir. Pourtant si le flux de rayonnement q_{inc} est incidènt au corps réel, alors le flux absorbé q_{abs} par le corps est donné par la relation suivante :

$$q_{abs} = \alpha q_{inc}, \tag{8}$$

où le coefficient d'absorption α varie entre 0 et 1 (pour tous les corps réels α est inférieur à 1).

Le coefficient d'absorption α d'un corps est en général différent du coefficient d'émission ε. Pourtant, dans différentes applications pratiques on suppose α égal à ε.

Quand deux corps aux différentes températures se trouvent face à face, la chaleur est échangée entre elles par rayonnement. Si le milieu intervenant est rempli d'une substance telle que l'air qui est transparent au rayonnement, le rayonnement émis d'un corps traverse le milieu intervenant sans l'atténuation et atteint l'autre corps, et vice-versa. Alors le corps chaud éprouve un gain net de chaleur, en raison de l'échange thermique par rayonnement. L'analyse de l'échange de chaleur par rayonnement à travers les surfaces est généralement une question compliquée.

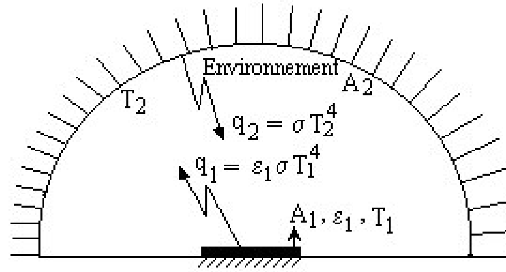


Fig. 3 *Transfert thermique par rayonnement entre la surface A_1 et son environnement.*

À la figure 3 on présente une plaque chaude ayant l'aire de la surface A_1 et l'émissivité ε_1. La plaque ayant la température T_1 est placée dans un grand environnement de l'aire A_2 ($A_1 / A_2 \to 0$) ayant la température T_2. Entre la plaque et l'environnement il y a l'air qui est transparent au rayonnement thermique. Le flux thermique émis par la surface A_1 est donné par la relation suivante :

$$Q_{1e} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 A_1. \tag{9}$$

L'environnement ayant la surface A_2 peut être approximé comme un corps noir par rapport à la petite surface A_1. Alors, la densité du flux thermique émis par l'environnement ayant la surface A_2 est σT_2^4 qui est un flux thermique incident à la surface A_1. Le flux thermique absorbé par la surface A_1 est :

$$Q_{2a} = \alpha_1 \sigma T_2^4 A_1. \tag{10}$$

Les pertes nettes par rayonnement (le flux thermique net) sur la surface A_1 représentent la différence entre le flux thermique émis et le flux thermique absorbé :

$$Q_{1net} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 A_1 - \alpha_1 \sigma T_2^4 A_1. \tag{11}$$

Si $\varepsilon_1 = \alpha_1$ pour le calcul du transfert de chaleur entre une petite surface ayant l'aire A_1 et son environnement qui a la température T_2, on obtient l'expression suivante :

$$Q_{1net} = \varepsilon_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) A_1. \tag{12}$$

La valeur positive du Q_{1net} signifie une perte de chaleur dans la plaque de surface A_1 tandis qu'une valeur négative signifie un gain de chaleur.

On considère maintenant deux surfaces finies A_1 et A_2 illustrées à la figure 4. Les surfaces sont maintenues aux températures absolues T_1 et T_2 respectivement, et ont les émissivités ε_1 et ε_2. La situation physique implique qu'une part du rayonnement quittant la surface A_1 atteint la surface A_2 tandis que le restant est perdu aux environnements. Les considérations semblables s'appliquent pour le rayonnement de la surface A_2. L'analyse de l'échange thermique par rayonnement entre les deux surfaces pour un tel cas devrait inclure les effets de l'orientation de la surface, de la contribution du rayonnement des environnements et de la réflexion du rayonnement sur la surface. Pour la géométrie de la figure 4 on suppose que le flux de rayonnement thermique de l'environnement est négligeable par rapport au flux thermique des surfaces A_1 et A_2. Dans ces conditions le flux net émis par rayonnement thermique par la surface A_1 peut être exprimé sous la forme :

$$Q_{1\,net} = F_1 A_1 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right), \tag{13}$$

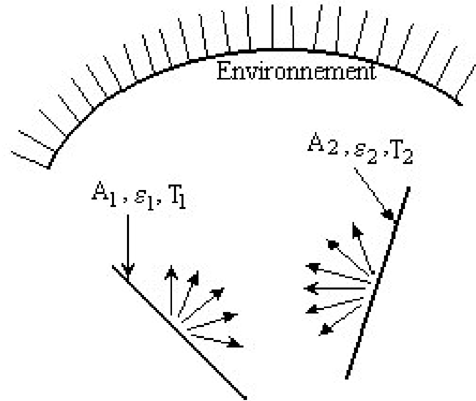


Fig. 4 *Transfert thermique par rayonnement entre les surfaces A_1 et A_2.*

où F_1 est un facteur qui inclut les effets de l'orientation des surfaces et de leurs émissivitées. La détermination de ce facteur est une question très compliquée [16].

0.3.3 Le coefficient de transfert thermique par rayonnement

Pour simplifier le calcul du transfert thermique par rayonnement, on peut utiliser dans certaines conditions restrictives le coefficient de transfert thermique par rayonnement h_r, similaire au coefficient de transfert thermique par convection :

$$q_1 = h_r(T_1 - T_2). \tag{14}$$

Ce concept peut être appliqué à l'équation (12). L'équation (12) peut être écrite ainsi :

$$Q_{1\,net} = A_1\varepsilon_1\sigma(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)(T_1 - T_2). \tag{15}$$

Si $|T_1 - T_2| << T_1$, l'équation (15) peut être linéarisée ainsi :

$$Q_{1\,net} \cong A_1\varepsilon_1\sigma \cdot 4T_1^3(T_1 - T_2) \tag{16}$$

ou

$$q_{1\,net} = \frac{Q_{1\,net}}{A_1} = (4\sigma\varepsilon_1 T_1^3)(T_1 - T_2). \tag{17}$$

En faisant la comparaison des équations (14) et (17) on constate que pour le cas particulier considéré (l'équation (12)), le coefficient de transfert thermique par rayonnement h_r peut être défini ainsi :

$$h_r = 4\sigma\varepsilon_1 T_1^3. \tag{18}$$

Exemple 0.2

Un cylindre ayant le diamètre $D = 0.2\,\text{m}$ a une surface isolée et l'autre maintenue à la température $T_p = 550\,\text{K}$. La surface chaude a une émissivité $\varepsilon_p = 0.9$ et est exposée dans un environnement ayant $T_e = 300\,\text{K}$. Si le milieu, entre le corps chaud et l'environnement, est l'air, calculer les pertes par rayonnement du cylindre vers l'environnement.

Solution

En supposant $\varepsilon_1 = \alpha_1$ on peut appliquer la relation (12) :

$$Q_p = A_p\varepsilon_p\sigma(T_p^4 - T_e^4) = \left(\frac{\pi}{4}(0.2)^2\right)(0.9)(5.67\cdot 10^{-8})\left((550)^4 - (300)^4\right) = 134.5\,\text{W}.$$

0.4 Modes combinés de transfert thermique

Jusqu'ici on a considéré séparément les trois modes de transmission de la chaleur, la conduction, la convection et le rayonnement. Dans la plupart des situations pratiques le transfert thermique à travers une surface a lieu simultanément par convection et par rayonnement vers le milieu environnant.

À la figure 0.5 on illustre une petite plaque, ayant l'aire A et l'émissivité ε, qui est maintenue à la température T_p et qui change l'énergie par convection vers un fluide à la température T_f avec un coefficient de convection h_c et par rayonnement vers l'environnement à T_e. La densité du flux thermique perdu à travers la plaque, par convection et rayonnement, est donnée par l'expression suivante :

$$q_p = h_c\left(T_p - T_f\right) + \varepsilon\sigma\left(T_p^4 - T_e^4\right). \tag{19}$$

Si $\left|T_p - T_e\right| << T_p$ le deuxième terme de la relation (19) peut être linéarisé et l'on obtient :

$$q_p = h_c\left(T_p - T_f\right) + h_r\left(T_p - T_e\right), \tag{20}$$

où $h_r = 4\varepsilon\sigma T_p^3$ est le coefficient de transfert thermique par rayonnement.

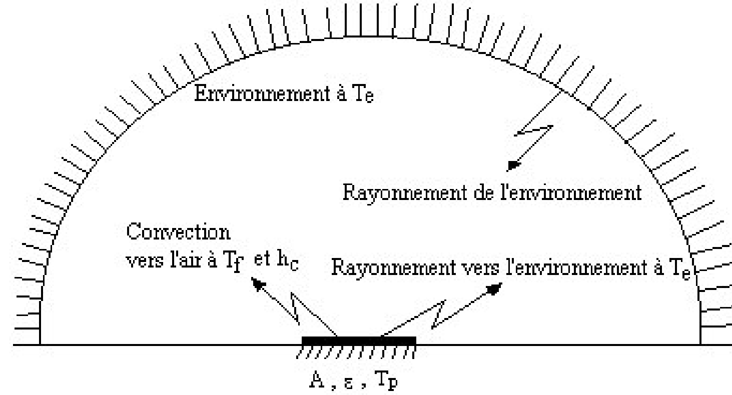


Fig. 0.5 *Transfert thermique simultanément par convection et rayonnement.*

Exemple 0.3

Une petite plaque mince en métal, ayant l'aire A, a l'une des faces isolée et l'autre face est exposée au soleil. La plaque absorbe l'énergie solaire à une densité de flux thermique de $500\ \mathrm{W/m^2}$ et elle perd cette énergie par convection vers l'air environnant à $T_f = 300\ \mathrm{K}$ avec un coefficient de convection $h_c = 20\ \mathrm{W/m^2K}$ et par rayonnement thermique vers l'environnement qui peut être supposé un corps noir à $T_e = 280\ \mathrm{K}$. L'émissivité de la surface est $\varepsilon = 0.9$. Déterminer la température d'équilibre de la plaque, T_p.

Solution

Le bilan d'énergie par l'unité de l'aire de la surface exposée peut être écrit ainsi :

$$q_p = h_c\left(T_P - T_f\right) + \varepsilon\sigma\left(T_p^4 - T_e^4\right)$$

ou, en introduisant les valeurs numériques, on obtient :

$$500 = 20\left(T_p - 300\right) + 0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}\left(T_p^4 - 280^4\right),$$

d'où l'on obtient l'équation suivante :

$$T_p = 340.68 - 0.255\left(\frac{T_p}{100}\right)^4 .$$

La solution de l'équation ci-dessus est $T_p = 315.5\ \mathrm{K}$.

0.5 Équations de la conduction thermique

0.5.1 Équation de la conduction thermique unidimensionnelle (1D)

Dans ce paragraphe on démontre l'obtention de l'équation de la conduction thermique 1D instationnaire en coordonnées cartésiennes. On considère une paroi solide où la température $T(x,t)$ est en fonction du temps et varie dans une direction seulement, la longue de la coordonnée x. On a vu au paragraphe 0.1 que lorsque la température varie la longue de la coordonnée x, on a une densité du flux thermique dans la direction de l'axe x donné par la loi de Fourier sous la forme :

$$q = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \qquad \text{W/m}^2. \tag{21}$$

Pour généraliser l'analyse, on suppose aussi une source à l'intérieur de la plaque (par exemple, les pertes par l'effet Joule) ayant le taux de génération $S = S(x,t)$ en W / m^3. On considère un élément de volume ayant l'épaisseur Δx et l'aire A perpendiculaire à l'axe x, illustré à la figure 0.6.

L'équation de bilan sur cet élément de volume est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \text{le taux net d'énergie} \\ \text{transmise par} \\ \text{conduction thermique} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{le taux net} \\ \text{de l'énergie} \\ \text{générée} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{le taux net} \\ \text{de croisance} \\ \text{de l'énergie interne} \end{pmatrix} \tag{22}$$

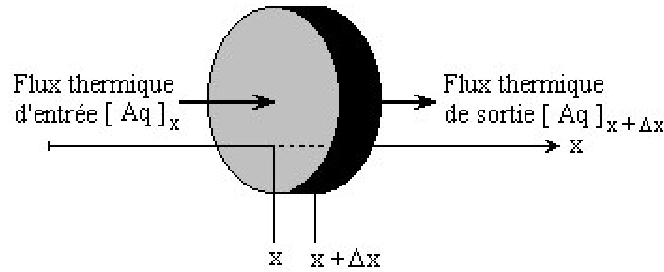


Fig. 0.6 *Élément de volume pour l'équation de conduction thermique 1D.*

Soit q la densité du flux thermique au point x dans la direction positive de la coordonnée x sur la surface A de l'élément de volume. Alors le taux du flux thermique qui entre dans l'élément de volume par la surface A au point x est :

$$[Aq]_x . \tag{23}$$

De même, le taux du flux thermique qui sort de l'élément de volume au point $x + \Delta x$ est :

$$[Aq]_{x+\Delta x} . \tag{24}$$

Le taux net de gain de flux thermique par l'élément de volume, par conduction, est la différence entre ces deux quantités :

$$[Aq]_x - [Aq]_{x+\Delta x} . \tag{25}$$

Le taux d'énergie générée dans l'élément de volume ayant le volume $A \cdot \Delta x$ est donné par :

$$SA\Delta x . \tag{26}$$

Le taux de croissance de l'énergie interne sur l'élément de volume résultant de la variation dans le temps de la température est :

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} A\Delta x , \tag{27}$$

où : c_p = la chaleur spécifique à pression constante, J / kgK ;
S = la puissance générée par l'unité de volume, W / m^3 ;
q = la densité du flux thermique dans la direction x, W / m^2 ;
ρ = la densité du materiel, kg / m^3 ;
t = le temps, s.

Les termes des équations (25) à (27) sont introduits dans l'équation de bilan (22) et ensuite on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{A}\frac{[Aq]_{x+\Delta x} - [Aq]_x}{\Delta x} + S = \rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} . \tag{28}$$

Quand $\Delta x \to 0$, le premier terme de la part gauche de l'équation (28), par définition, devient la dérivée de $[Aq]$ par rapport au x et l'équation (28) prend la forme :

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(Aq) + S = \rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} . \tag{29}$$

Si l'on introduit la densité q du flux thermique donnée par la relation (21) dans l'équation (29) on obtient :

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(A\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + S . \tag{30}$$

Pour l'équation (30) on n'a pas spécifié le système de coordonnées mais il est nécessaire de connaître la dépendance de l'aire A en fonction de la coordonnée x. Pour cela on considère les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Coordonnées cartésiennes

Si l'aire A ne varie pas tout au long de la coordonnée x alors l'équation (30) devient :

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + S , \tag{31}$$

qui est l'équation de conduction thermique 1D instationnaire en coordonnées cartésiennes.

Coordonnées cylindriques

Si l'on remplace dans l'équation (30) la variable x par la variable radiale r et l'on tient compte que l'aire A est proportionnelle à la variable r, on obtient l'équation de conduction thermique 1D instationnaire en coordonnées cylindriques :

$$\rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S \,. \tag{32}$$

Coordonnées sphériques

De même si l'on remplace dans l'équation (30) la variable x par la variable radiale r et l'on tient compte que l'aire A est proportionnelle à la variable r^2, on obtient l'équation de conduction thermique 1D instationnaire en coordonnées sphériques :

$$\rho c_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S \,. \tag{33}$$

0.5.2 Équation de conduction thermique tridimensionnelle (3D)

Suivant la même approche que dans le paragraphe précédent on obtient l'équation de conduction thermique en trois dimensions.

Coordonnées cartesiennes

Dans le système de coordonnées (x, y, z) l'équation de conduction thermique instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S(x,y,z,t) \,, \tag{34}$$

si le milieu est nonisotropique. Si $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda = \lambda(T)$ et $S = S(T)$ on a un problème non-linéaire.

Coordonnées cylindriques

Dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) l'équation de conduction thermique instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S \,. \tag{35}$$

0.6 Conditions aux limites

Pour la résolution d'une équation de transfert thermique, des conditions initiales et aux limites adéquates sont nécessaires. Les conditions initiales spécifient la distribution de la température à l'instant $t = 0$. Les conditions aux limites spécifient les conditions thermiques aux frontières du domaine de calcul. Par exemple, sur une frontière, on peut spécifier la

distribution de la température, ou la distribution de la densité du flux thermique, ou un transfert thermique par convection vers le fluide environant ayant une température connue et un coefficient de transfert thermique aussi connu.

Par la suite on présente la représentation mathématique des trois types de conditions aux limites appelées *température imposée*, *densité du flux thermique imposée* et *condition à la limite par convection.*

0.6.1 Conditions aux limites de type "température imposée" (Dirichlet)

Dans de nombreuses applications pratiques la température est considérée connue sur les frontières du domaine de calcul. Par exemple, une surface de frontière en contact avec la glace qui se fond est maintenue à une température uniforme ou la distribution de la température sur la frontière est connue en fonction du temps.

On considère une plaque d'épaisseur L illustrée à la figure 0.7. On suppose que la surface de la frontière à $x = 0$ est maintenue à la température uniforme T_1 et la surface de frontière à $x = L$ à la température uniforme T_2.

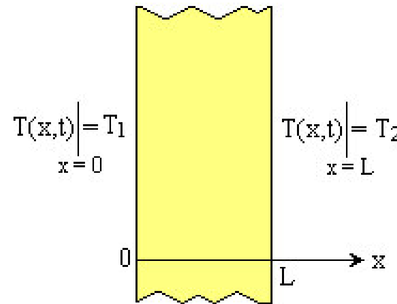


Fig. 0.7 *Température imposée aux frontières*
(conditions aux limites du premier type).

Les conditions aux limites peuvent être écrites ainsi :

$$T(x,t)\big|_{x=0} \equiv T(0,t) = T_1 \;; \qquad (36)$$

$$T(x,t)\big|_{x=L} \equiv T(L,t) = T_2 \,. \qquad (37)$$

Dans certains cas, la distribution de la température aux frontières est spécifiée en fonction de la position et du temps. Quand la valeur de la température est spécifiée à la frontière, on dit que *la condition à la limite est du premier type.*

0.6.2 Conditions aux limites de type "densité du flux thermique imposée" (Neumann)

Dans certains cas, à la frontière d'un domaine de calcul, la densité du flux thermique est connue. Par exemple, quand une surface du domaine d'analyse est chauffée à l'aide d'une installation électrique la densité du flux thermique sur la surface est connue.

On considère une plaque d'épaisseur L illustrée à la figure 0.8. On suppose que par la surface de la frontière du domaine de calcul, à $x=0$, on a une densité de flux thermique q_0 (W / m^2) et par la surface de la frontière à $x=L$ on a q_L (W / m^2).

Par la suite on présente la représentation mathématique de ces conditions aux limites. À $x=0$, la source de chaleur extérieure q_0 qui entre par la surface de la frontière doit être égale à la densité du flux thermique de conduction de la plaque :

$$q_0 = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} . \tag{38}$$

De même, à $x=L$ de chaleur extérieure q_L qui entre par la surface de la frontière doit être égale à la densité du flux thermique de conduction de la plaque :

$$q_L = +\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} . \tag{39}$$

Dans les équations (38) et (39) une valeur positive pour q_0 et q_L signifie que la source de chaleur (la densité de flux thermique) entre dans la plaque tandis qu'une valeur négative de q_0 et q_L signifie que la source de chaleur sort de la plaque. Ces conditions aux limites s'appellent *conditions aux limites du deuxième type*.

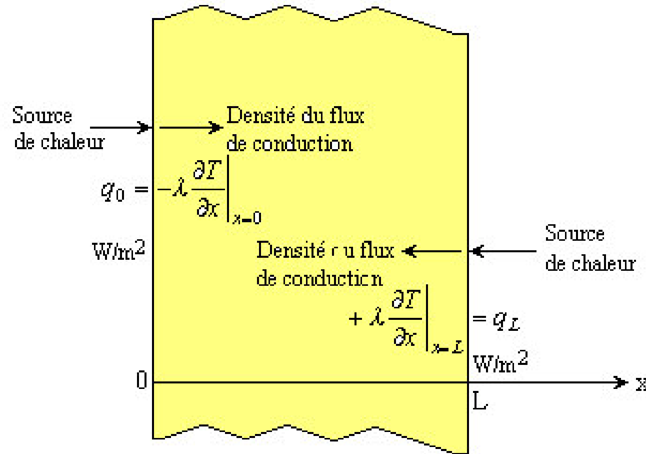


Fig. 0.8 *Densité du flux imposée aux frontières (conditions aux limites du deuxième type).*

Si q est la densité de flux de rayonnement, la condition à la limite est :

$$q = \sigma\varepsilon\left(T^4 - T_\infty^4\right)$$

où T_∞ est la température du milieu environnant.

0.6.3 Conditions aux limites de type "convection" (mixte)

Dans plusieurs applications pratiques le transfert thermique aux frontières du domaine d'analyse est fait par convection avec un coefficient de transfert thermique h vers le fluide environnement ayant la température connue. On considère une plaque d'épaisseur L illustrée à la figure 0.9. On suppose un fluide à la température T_1 qui s'écoule sur la surface de la plaque à $x=0$, ayant un coefficient de transfert thermique h_1. La formulation mathématique de ce type de condition à la limite est obtenue en écrivant le bilan d'énergie à la surface $x=0$, ainsi

$$\begin{pmatrix}\text{La densité du flux thermique} \\ \text{de convection du fluide à } T_1 \\ \text{vers la surface à } x=0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{La densité du flux thermique de conduction} \\ \text{de la surface de la plaque à } x=0 \\ \text{vers l'intérieur de la plaque}\end{pmatrix}$$

ou

$$h_1\left[T_1 - T(x,t)\big|_{x=0}\right] = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \tag{40}$$

qui est la condition à la limite à la frontière $x=0$ (*condition à la limite du troisième type*).

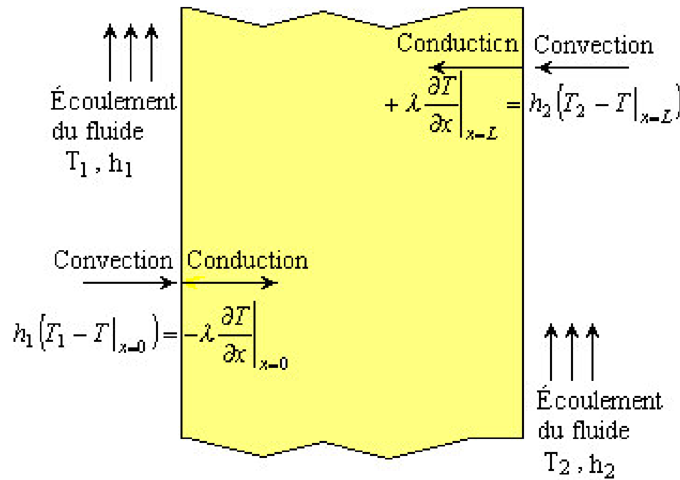


Fig. 0.9 *Conditions aux limites de type "convection" aux frontières*

Si le fluide à la température T_2, ayant le coefficient de transfert thermique h_2 s'écoule sur la surface de la plaque, $x=L$, le bilan de l'énergie sur cette surface est :

$$\begin{pmatrix}\text{La densité du flux thermique} \\ \text{de convection du fluide à } T_2 \\ \text{vers la surface à } x=L\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{La densité du flux thermique de conduction} \\ \text{de la surface de la plaque à } x=L \\ \text{vers l'intérieur de la plaque}\end{pmatrix}$$

ou

$$h_2\left[T_2 - T(x,t)\Big|_{x=L}\right] = +\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=L}, \tag{41}$$

qui est la condition à la limite à la frontière $x = L$ (*condition à la limite du troisième type*).

Exemple 0.4

On considère la conduction thermique stationnaire 1D dans une plaque, ayant une conductivité thermique constante dans le domaine $0 \le x \le L$. Le flux thermique généré par l'unité de volume, dans la plaque, est $S_0 e^{-\beta x}$ W/m^3, tandis que la surface de la frontière à $x = 0$ est isolée et la surface de la frontière à $x = L$ transmet une densité de flux thermique par convection, vers le milieu environnant, avec un coefficient de transfert thermique h (en W/m^{2}K).

Écrire la formulation mathématique de ce problème de conduction thermique.

Solution

L'équation de conduction thermique est obtenue à partir de l'équation (30) particularisée pour le régime stationnaire, en mettant $S = S_0 e^{-\beta x}$ et en considérant λ constante. La condition à la limite, à $x = 0$, est obtenue de l'équation (38) en mettant $q_0 = 0$ et à $x = L$ de l'équation (41). La formulation mathématique est la suivante :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{1}{\lambda} S_0 e^{-\beta x} = 0 \qquad 0 \le x \le L\ ;$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0 \qquad \text{à} \quad x = 0\ ;$$

$$\lambda \frac{dT(x)}{dx} + hT(x) = hT_\infty \qquad \text{à} \quad x = L.$$

Exemple 0.5

On considère la conduction thermique stationnaire 1D dans un cylindre, ayant une conductivité thermique constante dans le domaine $a \le r \le b$. Le flux thermique généré par l'unité de volume est S_0 W/m^3, tandis que les surfaces de frontière intérieure et extérieure transfèrent une densité de flux thermique par convection. Les coefficients de transfert thermique par convection pour la surface intérieure et extérieure sont h_a et h_b respectivement et les températures du fluide intérieur et extérieur sont T_a et T_b respectivement.

Écrire la formulation mathématique de ce problème de conduction thermique.

Solution

L'équation de conduction thermique est obtenue à partir de l'équation (32) particularisée pour le régime stationnaire, en mettant $S = S_0$ et en considérant λ constante. Les conditions aux limites à $r = a$ et à $r = b$ sont obtenues conformément aux équations (40) et (41) mais en considérant les coordonnées cylindriques. La formulation mathématique est la suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT(r)}{dr}\right)+\frac{S_0}{\lambda}=0 \qquad a<r<b\ ;$$

$$-\lambda\frac{dT(r)}{dr}+h_aT(r)=h_aT_a \qquad \text{à} \quad r=a\ ;$$

$$\lambda\frac{dT(r)}{dr}+h_bT(r)=h_bT_b \qquad \text{à} \quad r=b\,.$$

Chapitre 1

Méthodes d'investigation et de prédiction de la réalité

La prédiction du transfert thermique et des phénomènes qui ont lieu à l'écoulement des fluides peut être obtenue par trois méthodes : l'expérience, le calcul théorique et le calcul numérique.

1.1 L'expérience

***Principe*.** Par l'expérience, on tente d'isoler ou de reproduire tout ou une part d'un phénomène physique à partir de modèles à l'échelle normale ou réduite.
Avantages. L'expérience fournit l'information la plus sûre sur un phénomène physique (comparée aux modélisations théoriques).
Inconvénients. Les modèles à l'échelle normale sont souvent très coûteux. Les modèles à l'échelle réduite sont moins coûteux mais l'extrapolation des résultats à l'échelle normale est parfois difficile. Les sondes de mesure intrusives génèrent des perturbations et donc représentent des sources d'erreurs.

1.2 Le calcul théorique

Principe. Le principe du calcul théorique est illustré à la figure 1.1

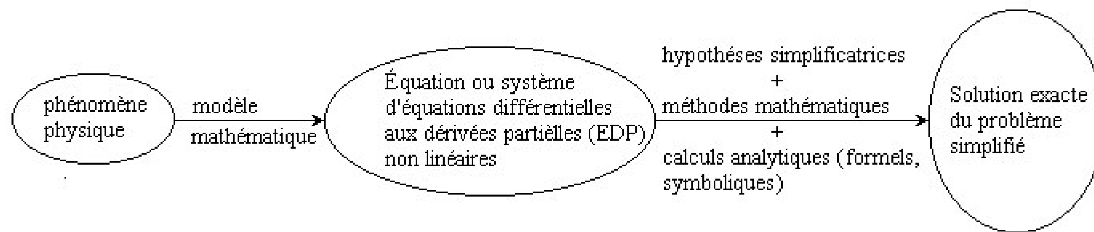


Fig. 1.1 *Le principe du calcul théorique.*

Avantages

On peut dire que le calcul théorique :

- ne nécessite pas, en général, de gros moyens de calcul ;
- n'est pas coûteux ;
- fournit des solutions exactes ;
- fournit des résultats à très grande vitesse.

Inconvénients

- le domaine d'application est extrêmement limité par rapport à la réalité physique (domaine simplifié) ;

- conditions idéalisées ;
- géométries simples ;
- phénomènes linéaires ou faiblement non linéaires ;
- rarement, peut être appliqué pour les problèmes 3D.

1.3 Le calcul numérique (modélisation et simulation)

Le modèle mathématique constitué par une équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) ou par un système d'EDP est transformé, à l'aide d'une méthode de discrétisation dans un système d'équations algébriques.

Principe

Le principe du calcul numérique est illustré à la figure 1.2.

Les méthodes de discrétisation les plus connues sont :

- méthodes des différences finies (MDF) ;
- méthodes des éléments finis (MEF) ;
- méthodes spectrales (MS) ;
- méthodes des volumes finis (MVF).

L'algorithme de résolution numérique implique la méthode d'intégration temporelle et de découplage, comme par exemple, les algorithmes SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC et PISO,

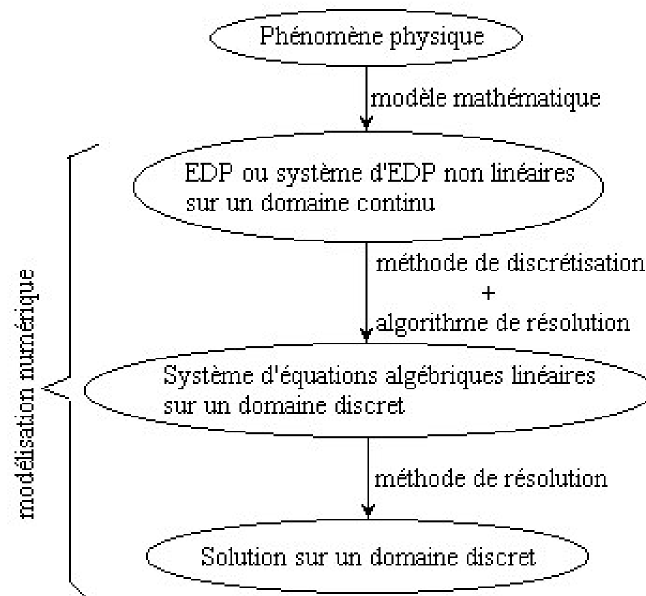


Fig. 1.2 *Le principe du calcul numérique.*

[50].

Avantages

Le calcul numérique :

- permet le calcul d'une solution numérique pour presque tous les problèmes pratiques ayant un modèle mathématique ;
- a un coût très faible, ayant une tendance à la baisse ;

– présente de la rapidité (permet de modifier la géométrie, les conditions aux limites, etc.) ;
– présente une information complète sur tous les champs, tous les points et à tout instant ;
– a la possibilité de simuler des conditions réelles exceptionnelles ;
– a la possibilité de simuler des conditions idéales.

Inconvénients

– tout dépend du modèle mathématique initial ;
– difficulté pour sélectionner la *"bonne"* solution en cas de solutions multiples au problème mathématique ;
– parfois, plus coûteux que l'expérience.

Quoi favoriser entre expériences et simulations ?

On peut dire que *"l'expérience mène et la simulation suit"* car l'expérience est :
– la seule pouvant mettre en évidence de nouveaux phénomènes de base ;
– indispensable pour permettre de valider les codes numériques.
Toutefois *"les expériences et les simulations sont complémentaires",* car la simulation permet de réduire le coût des projets complexes en réduisant le nombre d'expérimentations.

Quelles sont les composantes d'un logiciel de modélisation et de simulation numérique ?

La mise en oeuvre d'une méthode numérique de calcul débouche inévitablement sur un logiciel qui lui est associé. Si, lors des premières tentatives de calcul par des méthodes numériques, on écrivait, pour chaque nouveau problème, un programme différent tenant compte de sa géométrie particulière, de ses particularités physiques et de ses conditions aux limites, on s'oriente aujourd'hui vers la réalisation de logiciels généraux dont la structure informatique est adaptée au traitement d'un grand nombre de problème du même type. Ces logiciels ont, pratiquement tous, trois composantes principales : (1) ***un préprocesseur,*** (2) un ***processeur de calcul*** (*solver* = *résoluteur*) et (3) ***un postprocesseur.*** Par la suite, on examine les fonctions de chaque composante dans un contexte général.

Le préprocesseur

Dans cette étape du calcul numérique les activités impliquées sont les suivantes :
• Description de la géométrie dans la région d'intérêt : *définition du domaine de calcul* ;
• Génération du maillage – discrétisation du domaine de calcul en éléments finis ou volumes de contrôle ;
• Choix du phénomène physique à modéliser ;
• Définition des propriétés physiques ;
• Spécification des conditions aux limites adéquates.

Le processeur de calcul

Celui-ci peut être réalisé, en général, en utilisant quatre méthodes numériques distinctes : *la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, les méthodes spectrales et la méthode des volumes finis.*
La méthode numérique comporte trois pas distincts :
• L'approximation de la variable inconnue par différents types de fonctions simples ;

• Discrétisation par la substitution de l'approximation dans les équations différentielles et l'obtention d'un système d'équations algébriques ;

• Résolution du système d'équations algébriques.

La principale différence entre les quatre méthodes numériques consiste dans le type d'approximation de la variable inconnue et dans le processus de discrétisation.

Méthode des différences finies

La variable inconnue Φ est décrite par plusieurs valeurs dans les points d'un maillage. Le développement de l'inconnue en series Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnue, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les inconnues voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations différentielles par différences finies on obtient un système d'équations algébriques pour les valeurs de l'inconnue dans chaque point du maillage.

Méthode des éléments finis

Dans la méthode des éléments finis on utilise des fonctions linéaires ou quadratiques, sur chaque élément, pour décrire la variation locale de l'inconnue Φ. Les équations différentielles sont exactement vérifiées par la solution exacte. En remplaçant l'approximation de Φ dans les équations différentielles, on constate que celles-ci ne vérifient pas exactement, et un résidu est défini dans ce cas pour mesurer l'erreur. Le résidu est minimisé en le multipliant par une fonction de pondération et en l'intégrant. Le résultat de l'intégration est un set d'équations algébriques pour les coefficients des fonctions d'approximation.

Méthodes spectrales

L'inconnue est approchée par des séries Fourier tronquées ou par des séries de polynomes Chébichev. Par rapport aux méthodes des différences finies et des éléments finis l'approximation n'est pas locale mais elle est valide sur tout le domaine de calcul. On utilise également le concept du résidu pondéré comme dans la méthode des éléments finis où en imposant que l'approximation doive correspondre à la solution exacte pour les points du maillage.

Méthode des volumes finis

Au début, la méthode a été développée comme une formulation spéciale de la méthode des différences finies. L'algorithme numérique a les pas suivants :

• Le domaine d'analyse (de calcul) est divisé en volumes finis (génération du maillage) ;

• L'intégration formelle des équations sur tous les volumes de contrôle ;

• La discrétisation, qui implique la substitution des différentes approximations de type différences finies pour les termes intégrés en représentant différents processus d'écoulement comme la convection, la diffusion et le terme source. Le résultat est la conversion des intégrales dans un système d'équations algébriques ;

• La résolution du système d'équations algébriques par l'utilisation d'une méthode itérative.

Le premier pas qui est l'intégration sur le volume de contrôle, fait la distinction entre la méthode des volumes finis et tous les autres techniques numériques. Le résultat de l'intégration exprime la conservation exacte de la grandeur physique, Φ, sur chaque volume de contrôle. Cette relation claire entre l'algorithme numérique et le principe de conservation physique détermine la principale attraction de la méthode des volumes finis et son concept devient plus facile à comprendre que le concept de la méthode des éléments finis ou de la méthode spectrale.

La conservation de la variable générale d'écoulement Φ, par exemple une composante de la vitesse ou de l'enthalpie (la température), sur le volume de contrôle peut être exprimée comme un bilan entre les différents processus qui tendent de l'augmenter ou bien de la baisser, c'est-à-dire

$$\left[\text{ le taux de changement, dans le temps, de } \Phi \text{ sur le volume de contrôle}\right] =$$
$$\left[\text{le flux net de } \Phi \text{ dû à la convection dans le volume de contrôle}\right]$$
$$+\left[\text{le flux net de } \Phi \text{ dû à la difussion dans le volume de contrôle}\right]$$
$$+\left[\text{le } t\text{aux net de création de } \Phi \text{ dans le volume de contrôle}\right]$$

Le postprocesseur

À l'intérieur de ce module, on présente les résultats à l'utilisateur sous une forme adaptée à sa perception de la physique du problème. Par exemple, dans un problème de conduction thermique, le tracé des isothermes est un résultat très utile, surtout si le logiciel autorise la visualisation de courbes isothermes associées à des valeurs choisies de la température.

Le postproceseur offre différentes facilités pour visualiser et interpreter les résultats comprenant aussi :

- visualisation de la géométrie et du maillage ;
- visualisation des vecteurs de grandeurs calculées ;
- visualisation des iso-lignes de différentes grandeurs ;
- visualisation des surfaces 2D et 3D ;
- possibilités d'exporter les différentes grandeurs sous forme de fichieres ;
- facilités d'animation.

Chapitre 2

Équations de conservation et classification des équations aux dérivées partielles (EDP)

2.1 Forme générale des équations modèles (EDP)

2.1.1 Principes de conservation

Les équations modèles résultent toutes d'un principe de conservation des quantités spécifiques (massiques Φ ou volumiques $\rho\Phi$). La quantité spécifique $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ est une caractéristique physique du fluide appelée *"variable dépendante"* où (x, y, z, t) sont les coordonnées spatiales et temporelles appelées *"variables indépendantes"*. La variable dépendante Φ peut être l'une de grandeurs physiques présentées au tableau 2.1 selon les équations de conservation.

Tableau 2.1 Les quantités massiques et volumiques pour différents équations de conservation

Equation de conservation	**Quantité massique** (Φ)	**Quantité volumique** ($\rho\Phi$)
Masse (équation de continuité)	1	ρ (masse volumique)
Quantité de mouvement	$\vec{u}$ (vitesse)	$\rho\,\vec{u}$ (q.d.m. volumique)
Énergie	h (l'enthalpie massique) e (l'énergie totale massique) T (la température)	$\rho\, h$ $\rho\, e$ $\rho\, T$
Espèces chimiques	m_j (la fraction massique de l'espéce j) x_j (la fraction molaire de l'espèce j)	$\rho\ m_j$ $\rho\ x_j$

2.1.2 Définitions

Si la dimension de $(\rho\Phi)$ est $[\Phi]/[L]^3$**,** on a :

- $\vec{J}$, densité surfacique de flux de la variable Φ par unité de temps : $[\Phi]/[L]^2[T]$;
- J_i, composante de $\vec{J}$ dans la direction i ;
- S, source de Φ par l'unité de volume : $[\Phi]/[L]^2[T]$.

Soit "D" le domaine de fluide de volume V et de surface Σ (fig.2.1), où J est le flux qui influence la variable dépendante Φ. On considère un volume de contrôle de dimensions dx, dy, dz montrées à la figure 2.2. Le flux J_x qui est la composante de J dans la direction x entre par l'interface ayant l'aire $dy \cdot dz$ alors que le flux sortant par l'interface opposée est

$J_x + (\partial J_x / \partial x)dx$. Le flux net par l'interface de l'aire $dy \cdot dz$ est $(\partial J_x / \partial x)dxdydz$. Si l'on considère également les contributions dans les directions y et z le flux net par l'unité de volume est :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = div\,\vec{J}$$

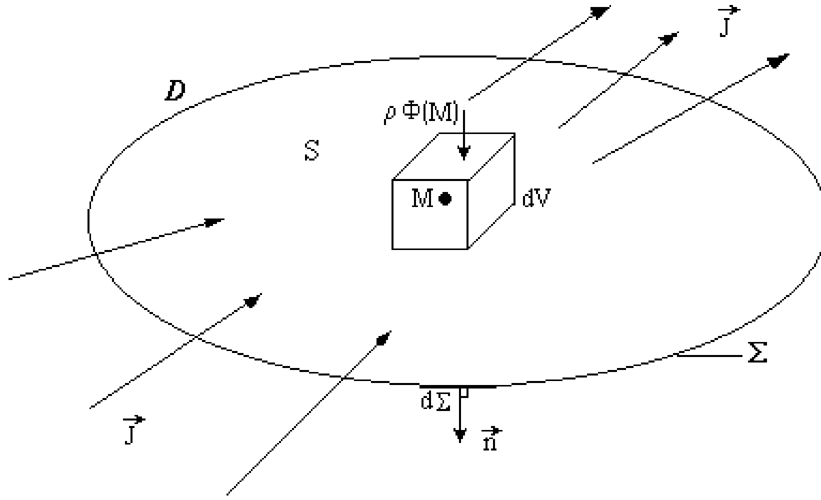


***Fig. 2.1** Volume élémentaire dans le domaine du fluide.*

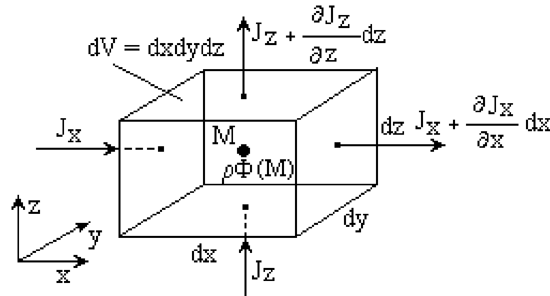


***Fig. 2.2** Bilan du flux dans le volume de contrôle.*

2.1.3 Forme intégrale ou globale de la loi de conservation

Les termes qui interviennent dans le bilan, pour Φ de la loi de conservation sont les suivants :

- le taux de variation de Φ dans V :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\Phi\, dV \quad ; \tag{2.1}$$

• le flux de Φ à travers la surface Σ :

$$\iint_{\Sigma} \vec{J}\,\vec{n}\,d\Sigma = \iiint_{V} div\vec{J}\,dV \;; \tag{2.2}$$

• la production (source) de Φ dans V :

$$\iiint_{V} S\,dV \;; \tag{2.3}$$

L'équation de la loi de conservation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V}(\rho\Phi)dV + \iiint_{V} div\,\vec{J} = \iiint_{V} S\,dV \;; \tag{2.4}$$

2.1.4 Forme locale de la loi de conservation

• le taux de variation de Φ dans V :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} \;; \tag{2.5}$$

• la variation volumique nette du flux à travers toutes les faces de dV :

$$\left\{\left[\left(J_x + \frac{\partial J_x}{\partial x}dx\right) - J_x\right]dy\,dz + \left[\left(J_y + \frac{\partial J_y}{\partial y}dy\right) - J_y\right]dx\,dz + \left[\left(J_z + \frac{\partial J_z}{\partial z}dz\right) - J_z\right]dx\,dy\right\}$$
$$\frac{1}{dV} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = div\,\vec{J} \tag{2.6}$$

• la production de Φ dans dV est S.

Finalement l'équation de la loi de conservation est la suivante :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + div\,\vec{J} = S\,. \tag{2.7}$$

Parce que $\vec{J}$ est généré par la convection et par la diffusion, on peut écrire :

$$\vec{J} = \vec{J}_{convectif} + \vec{J}_{diffusif} = \rho\,\vec{u}\Phi - \Gamma\,grad\Phi\,, \tag{2.8}$$

où Γ est le coefficient de diffusion. La forme générale de la loi de conservation devient :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + div(\rho\vec{u}\Phi) = div(\Gamma\,grad\Phi) + S\,, \tag{2.9}$$

Dans la direction “i” l’équation s’écrit ainsi :

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}) + S . \tag{2.10}$$

Dans le tableau 2.2 on présente les variables Φ, Γ et S pour les différentes équations de conservation.

Tableau 2.2 Les variables Φ, Γ et S pour différentes équations de conservation.

Equation de conservation	Φ	Γ	S
Masse	1	-	
Q.d.m.	u_i	μ	ρg_i (forces de volume) $-(grad\ p)_i$ (gradient de pression) $(S_{\gamma,\mu}) = (\gamma + \mu)(grad(div\,\vec{u}))_i$ (complément des forces visqueuses pour un fluid newtonien avec les coficients de viscosité $\mu, \gamma = cste.$)
Energie	h	$\frac{\lambda}{c_p}$	r (puissance calorifique dissipé par les sources de chaleur volumique) $\bar{\bar{\tau}} : grad\,\vec{u}$ (dissipation visqueuse) $\frac{dp}{dt}$ (puissance volumique liée aux variations de pression)
	T		$\frac{1}{c_p}\left(r + \bar{\bar{\tau}} : grad\,\vec{u} + \beta T \frac{dp}{dt}\right)$
Espèces chimiques	m_j	D_j	R_j (vitesse d’apparition de l’espèces j par réaction chimique)

μ – coefficient de viscosité de cisaillement pur (viscosité dynamique) ;
γ – coefficient de viscosité d’expansion volumique ;
λ – conductivité thermique (coeficient de diffusion thermique) ;
c_p – chaleur massique à pression constante ;
D_j – coefficient de diffusion massique (loi de Fick) ;
$\bar{\bar{\tau}}$ – tenseur des contraintes de viscosité ;
$\vec{g}$ – gravité ;
β – coefficient de dilatation thermique ;
h – l’enthalpie massique ;
m_j – fraction massique de l’espèce j .

2.1.5 Forme conservative et non conservative des équations modèles

L'équation (2.9) qui est la forme conservative générale des équations modèles peut être explicitée ainsi :

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Phi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\vec{u}grad\ \Phi+\Phi\, div(\rho\vec{u})=div\left(\Gamma grad\ \Phi\right)+S\,. \tag{2.11}$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{u}grad\ \Phi\right)+\Phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\,\vec{u}\right)\right)=div(\Gamma grad\ \Phi)+S\ , \tag{2.12}$$

où le terme ci-dessous représente la dérivée particulière :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{u}\ grad\ \Phi\right)=\frac{d\Phi}{dt}\,, \tag{2.13}$$

et le terme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\,\vec{u}\right)=0\,, \tag{2.14}$$

représente l'équation de continuité.
Finalement l'équation (2.12) s'écrit sous la forme non conservative ainsi :

$$\rho\frac{d\Phi}{dt}=div\left(\Gamma\, grad\Phi\right)+S \tag{2.15}$$

Remarque: Par la méthode des volumes finis on part uniquement de la forme conservative des équations modèles.

2. 2 Classification des équations différentielles aux dérivées partielles de deuxième ordre

En général les équations aux dérivées partielles sont classifiées en trois catégories, appelées *elliptiques, paraboliques, et hyperboliques.* Pour illustrer cette classification on considère la plus générale équation différentielle de deuxième ordre en deux variables indépendante x et y :

$$A\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+B\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+C\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+D\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}+E\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}+F\Phi+G(x,\,y)=0\,. \tag{2.16}$$

On suppose que l'équation (2.16) est linéaire (cette restriction n'est pas essentielle), c'est-à-dire les coefficients A, B, C, D et F sont fonctions de deux variables indépendantes et ces coefficients ne dépendent pas de la variable dépendante Φ.

La classification est faite sur la base des coefficients A, B et C des dérivées de deuxième ordre en fonction de la valeur du déterminant :

$$-\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

L'équation différentielle est appelée :

Elliptique si $B^2 - 4AC < 0$; (2.17)

Parabolique si $B^2 - 4AC = 0$; (2.18)

Hyperbolique si $B^2 - 4AC > 0$. (2.19)

Exemples

1. L'équation de conduction thermique, sans terme source,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{2.20}$$

est de type elliptique.

2. L'équation de conduction thermique, avec terme source,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda} S(x, y) = 0, \tag{2.21}$$

est aussi de type elliptique.

Une caractéristique des équations elliptiques est qu'elles nécessitent des conditions aux limites adéquates pour toutes les frontières du domaine de calcul.

3. L'équation de conduction thermique unidimensionnelle instationnaire :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.22}$$

est de type parabolique.

4. L'équation de l'onde de deuxième ordre :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \tag{2.23}$$

où t est le temps, c est la vitesse de propagation de l'onde et x est l'espace, est de type hyperbolique.

Les critères de classification présentés ci-dessus sont des critères purement mathématiques. Si l'on considère, par exemple, l'équation (2.20) ou (2.21) on constate que ces équations sont du deuxième ordre en dérivées partielles tant en variable x qu'en variable y. Les conditions dans un certain point du domaine de calcul sont influencées par les changements des conditions d'un côté et de l'autre côté de cette position tant dans la direction de la variable x que dans la direction de la variable y. L'équation de conduction thermique stationnaire 2D est *elliptique en x et en y* et donc appelée tout simplement *elliptique.*

On considère maintenant l'équation de conduction thermique unidimensionnelle instationnaire (2.22) qui est de deuxième ordre en dérivée partielle de la variable x et de premier ordre en dérivée partielle de la variable t. L'équation est regardée comme équation de type elliptique en variable x. Pourtant, en ce qui concerne la variable temps t, les conditions pour un certain moment sont influencées seulement par les changements à l'instant précédent. L'équation est appelée *parabolique en temps* ou tout simplement *parabolique.* L'avantage à la résolution d'une équation parabolique consiste dans la réduction du temps de calcul et dans la réduction du stockage en mémoire. Par exemple, pour l'équation de conduction thermique 2D instationnaire, qui est parabolique en temps, il faut considérer seulement un maillage 2D pour le champ de température. Le champ de température à l'instant t n'est pas affecté par le champ de température à l'instant $t+\Delta t$. On commence par un champ de température initial donné et puis on calcule, successivement le champ de température aux différents moments de temps. Dans le cas des équations hyperboliques, il semble qu'il est impossible d'avoir l'avantage qui existe pour les équations paraboliques.

2.3 Coordonnées à simple et double influence

2.3.1 Définitions

• Une coordonnée x, y, z ou t est dite à *double influence* si les conditions en une position donnée dans la direction de la coordonnée, sont influencées par des changements de conditions d'un côté ou de l'autre côté de cette position.
Exemple : Dans une plaque métallique (fig. 2.3) quand la température T_1 augmente, la température du point voisin T_2 va augmenter aussi. Et, si T_3 augmente, T_2 va augmenter aussi.

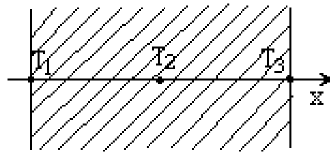


Fig. 2.3 *Exemple de coordonnées à double influence.*

• Une coordonnée x, y, z ou t est dite à *simple influence* si les conditions en une position donnée dans la direction de la coordonnée, sont influencées par des changements de conditions uniquement d'un seul coté de cette position.
Exemple : le temps est toujours une variable à simple influence, c'est-à-dire ce qui se passe dans l'avenir n'influence jamais le présent.
Remarque : Normalement les coordonnées spatiales (x, y, z) sont des variables à double influence, mais sous l'effet d'un écoulement (convection) elles peouvent devenir à simple influence.

2. 4 Equations paraboliques et elliptiques

2.4.1 Définitions

Soit $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une variable dépendante qui vérifie l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + c(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Phi + d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{2.24}$$

où $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des variables indépendantes.

• Si tous les a_i sont non nuls et du même signe, l'équation est dite *elliptique :*

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = cste.$$

• Si tous les a_i sont non nuls et du même signe, à une exception, l'équation est *hyperbolique :*

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = cste.$$

• Si un seul des a_i est nul et si le b_i correspondant est non nul, l'équation est *parabolique :*

$$Ax^2 + By + C = 0.$$

Dans le cas où $\Phi(x, y, z, t)$ vérifie l'équation de conservation

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) - S = 0, \tag{2.25}$$

on montre que cette équation est :

• de type elliptique si tous les variables indépendantes de l'équation de conservation sont à double influence ;

• de type parabolique si au moins l'une des variables indépendantes est à simple influence.

2.4.2 Exemples

• *Conduction 1D instationnaire*, $\Phi = \Phi(x,t)$:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - S = 0, \tag{2.26}$$

où t est une variable à simple influence, donc l'équation est parabolique en t, tandis que x est une variable à double influence, donc l'équation est elliptique en x. L'équation est parabolique en tenant compte que $a_{1(t)} = 0$, $b_{1(t)} = \rho$, $a_{2(x)} = -\Gamma$.

• *Conduction 1D stationnaire*, $\Phi = \Phi(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + S = 0, \tag{2.27}$$

où x est une variable à double influence et $a_{1(x)} = \Gamma \neq 0$, donc l'équation est elliptique.

• *Conduction 2D stationnaire,* $\Phi = \Phi(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+S=0, \tag{2.28}$$

où x et y sont des variables à double influence (donc l'équation est elliptique en x et elliptique également en y) et parce que $a_{1(x)} = a_{2(y)} = \Gamma \neq 0$ l'équation est elliptique.

• *Conduction 2D, convection 1D, stationnaire*, $\Phi = \Phi(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)-S=0, \tag{2.29}$$

où x et y sont des variables à double influence (donc l'équation est elliptique en x et elliptique egalement en y) et parce que $a_{1(x)} = -\Gamma$ et $b_{1(x)} = \rho u$ l'équation est elliptique.

Chapitre 3

Les méthodes principales de discrétisation

3.1 Introduction

Il y a deux grandes familles de méthodes de discrétisation :

• Les méthodes *d'approximation des équations*. Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées car les opérateurs différentiels sont discrétisés sur un maillage (la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis) ;

• Les méthodes *d'approximation des solutions*. Selon ces méthodes on cherche une solution approchée à partir des équations exactes. Les solutions sont écrites comme des séries de fonctions tronquées aux ordres de précisions désirées (les méthodes spectrales et la méthode des éléments finis).

3.2 Méthode des différences finies (MDF)

Principe

Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations modèles par des développements en séries de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie.

Exemple

Soit le maillage régulier 1D :

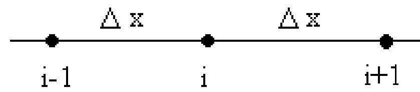


Fig. 3.1 *Maillage 1D.*

où $\Delta x = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$.

Le développement en série de Taylor, autour du point i du maillage, de la variable inconnue, est donné par les relations :

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i - \frac{1}{1!}\Delta x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3\left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + O\left((\Delta x)^4\right) ; \qquad (3.1)$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \frac{1}{1!}\Delta x\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3\left(\frac{d^3\Phi}{dx^3}\right)_i + O\left((\Delta x)^4\right). \qquad (3.2)$$

En retenant les premiers deux termes du développement de la relation (3.1), on obtient :

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x}. \qquad (3.3)$$

Ceci signifie que la dérivée d'ordre 1, au point i, est approchée par différences finies régressives d'ordre 1. En retenant les premiers deux termes du développement de la relation (3.2) on obtient :

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x}, \qquad (3.4)$$

ce qui signifie que la dérivée d'ordre 1, au point i, est approchée par différences finies progressives d'ordre 1.

En soustrayant la relation (3.1) de la relation (3.2) on obtient l'approximation par différences finies centrales d'ordre 2 :

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x}. \qquad (3.5)$$

En additionnant les relations (3.1) et (3.2) on obtient l'approximation de la dérivée de deuxième ordre par différences finies centrées d'ordre 2 :

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_i = \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{(\Delta x)^2}. \qquad (3.6)$$

Avantages de la méthode

• simplicité de mise en oeuvre ;

• encombrement mémoire raisonnable (matrice de type bande) et temps de calcul raisonnable.

Inconvénients de la méthode

• le principe de conservation n'est pas assuré après la discrétisation ;
• l'apparition d'instabilités numériques ;
• difficulté pour traiter les géométries plus complexes.

3.3 Méthode des éléments finis (MEF)

Principe mathématique

Le principe mathématique est basé sur les méthodes suivantes :

- Méthodes variationnelles (minimisation d'une fonctionnelle) ;
- Méthodes des résidus pondérés.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie. Sur chacun de ces domaines, appelés éléments finis, la fonction inconnue est approchée par un polynôme dont le degré peut

varier d'une application à l'autre mais reste en général faible. Ces éléments, triangles ou quadrilatères, rectilignes ou curvilignes, doivent réaliser une partition du domaine d'étude (ils sont disjoints et leur union recouvre le domaine tout entier). Cette partition qui est généralement appelée découpage ou discrétisation du domaine doit respecter un certain nombre de règles qui permettent d'assurer un bon déroulement du calcul.

Etapes de la mise en oeuvre

- Discrétisation du domaine en un nombre fini d'éléments ;
- Choix d'un modèle d'interpolation (variation de la variable Φ sur l'élément) ;
- Écriture des équations modèles sous forme algébrique au niveau local (dans un élément): détermination des vecteurs et matrices caractéristiques ;
- Assemblage des vecteurs et matrices locaux en un vecteur global B et une matrice globale A ;
- Résolution du système $AX = B$.

Avantage

- Adapté aux géométries complexes.

Inconvénients

- Formalisme mathématique plus compliqué et plus difficile à mettre en oeuvre ;
- Coûteux en stockage mémoire (matrices pleines) et en temps de calcul (inversion) ;
- Caractère conservatif des équations non forcément assuré.

3.4 Méthodes spectrales (MS)

Principe

On remplace, dans les équations modèles l'inconnue Φ par des développements tronqués sur des bases de fonctions orthogonales (polynômes Chebychev, Legendre, Fourier) et en utilisant leur propriété d'orthogonalité on se ramène à des systèmes d'équations différentielles ordinaires plus simples à résoudre.

Avantage

- Permet d'obtenir des solutions d'une très grande précision.

Inconvénients

- Formalisme mathématique plus complexe et mise en oeuvre délicate ;
- Difficultés pour traiter les géométries complexes et des conditions aux limites non académiques.

3.5 Méthode des volumes finis (MVF)

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, [50]).

Principe. La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des

équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire Φ, valable pour toutes les équations d'écoulement, en régime stationnaire :

$$\oint_A (\rho \Phi \vec{v}) d\vec{A} = \oint_A (\Gamma_\Phi \, grad \, \Phi) d\vec{A} + \int_{VC} S_\Phi dV \,, \qquad (3.7)$$

où

ρ - la densité du fluide ;

$\vec{v}$ - le vecteur vitesse ($\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$) ;

$\vec{A}$ - le vecteur l'aire de la surface ;

Γ_Φ - le coefficient de diffusion de la grandeur Φ ;

$grad\,\Phi$ - le gradient de Φ ($grad\,\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j}$ en 2D) ;

S_Φ - le terme source (la source de Φ par unité de volume).

L'équation (3.7) est appliquée sur chaque volume de contrôle du domaine de calcul (domaine d'étude ou d'analyse). La discrétisation de cette équation donne :

$$\sum_f^{N_{faces}} \rho_f v_f \Phi_f A_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_\Phi (\nabla \Phi)_n A_f + S_\Phi V \,, \qquad (3.8)$$

où : N_{faces} - le nombre de faces (interfaces) du volume de contrôle ;

Φ_f - la valeur de Φ transferée par convection à travers l'interface f ;

v_f - le flux de masse à travers l'interface f ;

A_f - l'aire de l'interface f ($\left|\vec{A}\right| = \left|A_x \vec{i} + A_y \vec{j}\right|$ en 2D) ;

$(\vec{\nabla}\Phi)_n$ - la valeur de $\vec{\nabla}\Phi$ normal (perpendiculaire) à l'interface f ;

V - le volume du volume de contrôle.

Les différentes étapes de la mise en oeuvre sont :

- Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points (les noeuds du maillage), autour desquels on définit des volumes élémentaires (appelés volumes de contrôle) contigus, non juxtaposés et sans discontinuités aux interfaces ;
- Les équations modèles, sous forme conservative, sont intégrées sur chaque volume de contrôle (VC) ;
- Les intégrales sur un volume de contrôle en un noeud donné sont évaluées en approchant la variation de Φ par des profils ou des lois d'interpolation entre les noeuds voisins du point considéré ;
- Écriture des équations algébriques en fonction des valeurs de Φ aux noeuds du maillage ;
- Résolution du système algébrique linéaire obtenu.

Avantages

- Préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle (continuité des flux aux interfaces), valable pour n'importe quelle finesse du maillage ;

- Mise en oeuvre relativement facile ;
- Applicable aux géométries complexes ;
- Temps de calcul et stockage mémoire raisonnable (matrice de type bande).

Inconvénient

- Moins précis que les méthodes spectrales.

3.5.1 Exemple : conduction thermique 1D stationnaire

Supposons l'équation de conduction thermique stationnaire unidimensionnelle :

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) + S = 0 . \tag{3.7}$$

Les étapes qui doivent être parcourues, pour obtenir le système déquations algébriques, sont les suivantes :

1. Discrétisation du domaine de calcul

La façon de discrétisation est présentée à la figure 3.2 (voir aussi l'annexe C).

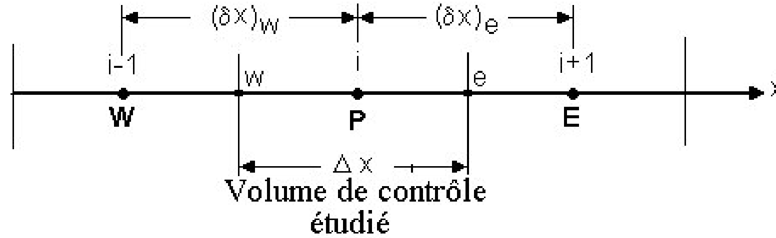


Fig. 3.2 *Maillage unidimensionnel.*

où :
P – Noeud considéré ;
W – Noeud "West" ;
E – Noeud "East" ;
W – interface "West" du volume de contrôle (VC) ;
e – interface "East" du VC ;
Δx – largeur du VC étudié.

2. Intégration de l'équation de conduction 1D sur le VC en P.

En intégrant l'équation (3.7) sur le volume de contrôle (fig. 3.2) on obtient successivment :

$$\int_w^e \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) dx + \int_w^e S dx = 0 ; \tag{3.8}$$

$$\left[\lambda \frac{dT}{dx}\right]_w^e + \int_w^e S \, dx = 0 ; \tag{3.9}$$

$$\lambda_e\left(\frac{dT}{dx}\right)_e - \lambda_w\left(\frac{dT}{dx}\right)_w + \overline{S}[x]_w^e = 0, \tag{3.10}$$

où $\overline{S}$ est une valeur moyenne du terme source S sur le volume de contrôle. En tenant compte de la loi de Fourier ($\vec{q} = -\lambda gradT$), $\vec{q}$ étant la densité du flux thermique, l'équation (3.10) peut être écrite ainsi :

$$-q_e + q_w + \overline{S}\Delta x = 0, \tag{3.11}$$

où q_e et q_w sont les densités du flux thermique aux interfaces du volume de contrôle.

3. ***Choix d'un profil de température (ou d'une formule d'interpolation) entre les noeuds voisins de*** P**.**
   Il y a deux types de profils qu'on peut envisager, l'un étant le profil constant (fig. 3.3 a) et l'autre le profil linéaire (fig.3.3 b).

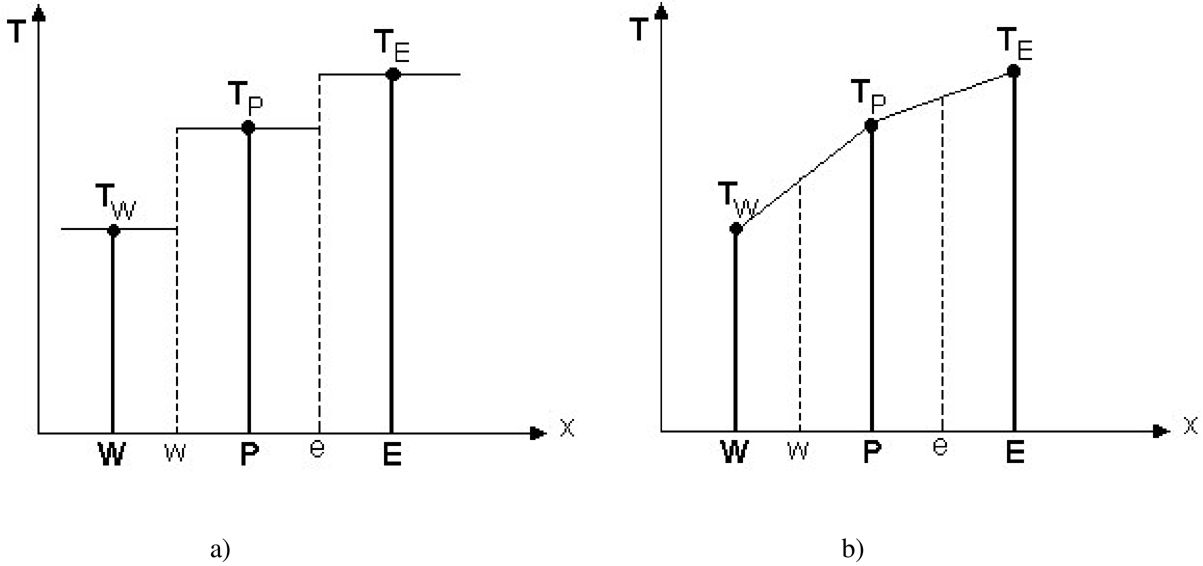


Fig. 3.3 *Choix du profil de température.*
a) Profil constant. b) Profil linéaire.

Dans le cas d'un profil constant de température (Fig. 3.3 a), sur le volume de contrôle, on a une discontinuité de T aux interfaces w et e du volume de contrôle. De plus, la dérivée dT/dx n'est pas définie et donc ce profil de température ne convient pas.
Dans le cas d'un profil linéaire de température (Fig. 3.3 b), entre les noeuds du maillage, la discontinuité de T n'existe plus et les dérivées aux interfaces sont définies :

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{x_E - x_P} = \frac{T_E - T_P}{\delta x_e}; \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{x_P - x_W} = \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}. \tag{3.13}$$

4. Écriture de l'équation de conduction thermique sous la forme algébrique

L'équation (3.11) s'écrite ainsi :

$$\frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{\delta x_w} + \bar{S}\Delta x = 0, \tag{3.14}$$

où $\bar{S}$ est la valeur moyenne de S sur le volume de contrôle.

Finalement, après le regroupement des termes, l'équation algébrique s'écrite ainsi :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{3.15}$$

avec

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} \qquad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} \qquad a_P = a_E + a_W \qquad b = \bar{S}\Delta x. \tag{3.16}$$

Remarques

1. La forme générale des équations discrétisées est la suivante :

$$a_P T_P = \sum a_{vs} T_{vs} + b \qquad vs = \text{voisin} \quad . \tag{3.17}$$

2. La dérivée dT / dx aurait pu être évaluée avec d'autres fonctions d'interpolation ;
3. Toutes les quantités ne doivent pas forcément être évaluées avec les mêmes fonctions d'interpolation ;
4. Pour une même variable, les mêmes fonctions d'interpolation ne doivent pas être forcément utilisées pour tous les termes dans l'équation modèle.

Principes à respecter

Même sur un maillage grossier, il faut que :
1. les variations des quantités Φ aient un comportement physique réaliste ;
2. le bilan global soit conservatif.

Traitement du terme source S

Si le terme source S varie de façon non linéaire, $S = S(T)$, on écrit :

$$\bar{S} = S_c + S_P T_P, \tag{3.18}$$

où S_c est un terme constant (indépendant de température). Il faut linéariser en T pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires.

3.5.2 Les règles de base (règles de Patankar)

Les suivantes règles ont été énoncées par Patankar, [50]

Règle N° 1 : *Consistance du flux aux interfaces des volumes de contrôle.*

Si une interface est commune à deux volumes de contrôle, l'expression du flux à travers elle, dans les équations discrétisées, doit être la même pour les deux volumes de contrôle voisins considérés.

Règle N° 2 : *Tous les coefficients a_P et a_{vs} doivent avoir le même signe dans l'équation discrétisée.*

On peut justifier cette règle par un contre exemple. Supposons que dans l'équation (3.15) on ait $a_P>0$, $a_E>0$ et $a_W<0$. Alors, si T_W augmente il faut que T_P baisse, donc un comportement physique non réaliste.

Règle N° 3 : *Pente négative dans le terme source linéarisé.*

Lors de la linéarisation du terme source $\overline{S} = S_c + S_P T_P$ la pente S_P doit être ≤ 0 car sinon on peut avoir $a_P< 0$ avec des $a_{vs} > 0$ (contraire à la règle n° 2).

Règle N° 4 : *Les équations discrétisées doivent rester valables quand la valeur d'une variable dépendante augmente avec une valeur constante. Mathématiquement la règle peut être écrite ainsi :*

$$a_P = \sum a_{vs} \quad \text{si} \quad S = 0 \ ;$$
$$a_P \geq \sum a_{vs} \quad \text{si} \quad S \neq 0 . \tag{3.19}$$

Démonstration

Si $S=0$, l'équation modèle est une équation différentielle ne contenant que des dérivées de T; T et $T+C$ sont des solutions de l'équation différentielle du problème continu et discontinu. L'équation discrétisée pour les deux solutions s'écrit ainsi :

$$a_P T_P = \sum a_{vs} T_{vs} + b \ ; \tag{3.20}$$

$$a_P (T_P + C) = \sum a_{vs} (T_{vs} + C) + b . \tag{3.21}$$

En soustrayant l'équation (3.20) de l'équation (3.21) on obtient :

$$a_P = \sum a_{vs} \ . \tag{3.22}$$

Chapitre 4

Méthode des volumes finis appliquée aux problèmes de conduction thermique

4.1 Conduction thermique 1D stationnaire

L'équation différentielle est la suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) + S = 0. \qquad (4.1)$$

L'équation discrétisée sur le volume de contrôle présenté à la figure 4.1 est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \ ; \qquad (4.2)$$

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e} \qquad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w} \qquad a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x \qquad b = S_c \Delta x .$$

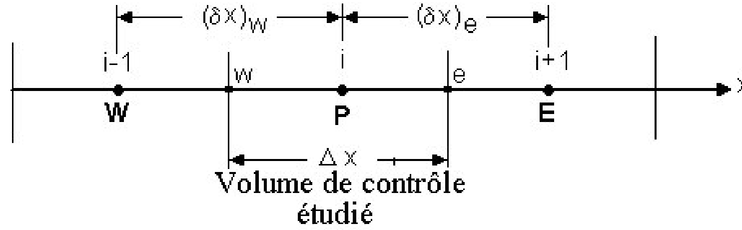


Fig. 4.1 *Maillage unidimensionnel*

En général $\delta x_w \neq \delta x_e$, le maillage pouvant être non uniforme. Le raffinement du maillage est fait dans les zones de forts gradients.

4.1.1 Détermination de la conductivité thermique aux interfaces des volumes de contrôle

En général $\lambda_e \neq \lambda_w$, la conductivité thermique étant en fonction de la température, $\lambda = \lambda(T)$, ou même $\lambda = \lambda(x)$ pour les matériaux composites.

La conductivité thermique à l'interface "e" peut être déterminée par l'interpolation linéaire entre les points P et E :

$$\lambda_e = f_e \lambda_P + (1 - f_e)\lambda_E \quad \text{avec} \quad f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e} \quad \text{et} \quad 1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x} \ . \qquad (4.3)$$

Si l'interface "e"(fig. 4.2) est située à mi-distance de P et E, alors $f_e = 1/2$ et on obtient :

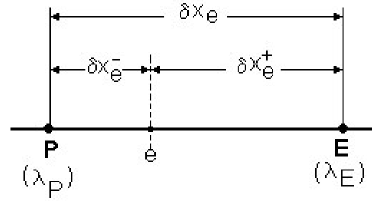


Fig. 4.2 *Sur la détermination de la conductivité yhermique.*

$$\lambda_e = \frac{\lambda_P + \lambda_E}{2}. \tag{4.4}$$

4.1.2 Conservation du flux aux interfaces

Si l'on considère le flux à l'interface "e"(voir fig. 4.3) on peut écrire :

$$q_e = -\lambda_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{\lambda_e (T_P - T_E)}{\delta x_e} = \frac{\lambda_P (T_P - T_e)}{\delta x_e^-} = \frac{\lambda_E (T_e - T_E)}{\delta x_e^+}. \tag{4.5}$$

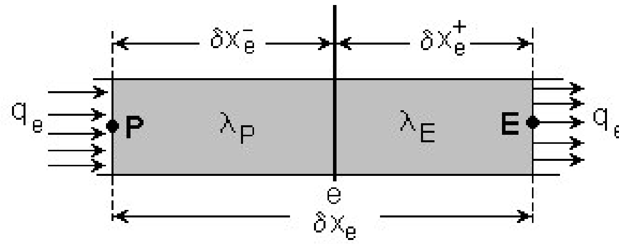


Fig. 4.3 *Conductivité thermique à l'interface.*

La densité du flux thermique à l'interface peut, également, être écrite ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\dfrac{\delta x_e^-}{\lambda_P} + \dfrac{\delta x_e^+}{\lambda_E}} = \frac{T_P - T_E}{\dfrac{\delta x_e}{\lambda_e}}. \tag{4.6}$$

De la relation (4.6) on sort l'expression de la conductivité thermique à l'interface du volume de contrôle :

$$\lambda_e = \frac{\delta x_e}{\dfrac{\delta x_e^-}{\lambda_P} + \dfrac{\delta x_e^+}{\lambda_E}} \tag{4.7}$$

Si l'on tient compte de la définition du coefficient f_e, la relation (4.7) devient :

$$\lambda_e = \frac{1}{\dfrac{1-f_e}{\lambda_P} + \dfrac{f_e}{\lambda_E}}. \tag{4.8}$$

Si l'on considère le cas particulier avec $f_e = 1/2$ la conductivité thermique à l'interface est :

$$\lambda_e = \frac{2\lambda_P \lambda_E}{\lambda_P + \lambda_E}. \tag{4.9}$$

qui est la moyenne harmonique des conductivités thermiques des noeuds voisins du maillage.

Remarque

La formule (4.9) est plus recommandée que la formule (4.4) :

• Si $\lambda_E \to 0$ (dans la formule (4.4)), ce qui signifie qu'on a un matériau isolant en δx_e^+, ce qui implique $q_e \approx 0$), alors $\lambda_E \to f_e \lambda_P \neq 0$, et la densité du flux thermique est donnée, à la limite, par la relation suivante :

$$q_e \to \frac{f_e \lambda_P (T_P - T_E)}{\delta x_e} \neq 0, \tag{4.10}$$

ce qui ne convient pas.

Si $\lambda_E \to 0$ (dans la formule (4.9), on obtient que $q_e \to 0$ ce qui convient.

• Si $\lambda_E / \lambda_P \to 0$ (dans la formule (4.4), ce qui signifie que $\lambda_P >> \lambda_E$, $\lambda_e = f(\lambda_E)$, et que la température $T_e \approx T_P$) alors $\lambda_e \to f_e \lambda_P$ ce qui ne convient pas.

Si $\lambda_E / \lambda_P \to 0$ (dans la formule (4.9)), alors $\lambda_e \to \lambda_E / f_e$ et la densité du flux thermique à l'interface "e", à la limite, devient :

$$q_e \to \frac{\lambda_E (T_P - T_E)}{f_e \delta x_e} = \frac{\lambda_E (T_P - T_E)}{\delta x_e^+}, \tag{4.11}$$

ce qui implique $T_e \to T_P$, et ce qui convient.

4.1.3 Traitement des non-linéarités

Si dans l'équation (4.1) $\lambda = \lambda(T)$ et $S = S(T)$ alors on a dans l'équation discrétisée :

$$b = b(T) \quad a_P = a_P(T) \quad a_{vs} = a_{vs}(T), \tag{4.12}$$

donc l'équation discrétisée (4.2) est une équation non-linéaire.

La résolution du système d'équations algébriques, dans ce cas, se fait par une procédure itérative. Les étapes qui doivent être parcourues sont les suivantes :

1. On donne des conditions initiales pour les T_i pour tous les points "i" du maillage.
2. On calcule les coefficients $a_P(T_i)$, $a_{vs}(T_i)$ et $b(T_i)$.
3. On résout le système d'équations algébriques linéaires pour obtenir les nouvelles valeurs des T_i.

4. On itère (retour en 2.) jusqu'à ce que les valeurs de T_i se stabilisent (convergence).

4.1.4 Linéarisation du terme source

Le terme source $\overline{S}(T)$ a une dépendance nonlinéaire de la température. Il faut qu'on linéarise en T, pour obtenir un système d'équations algébriques linéaires, ainsi :

$$\overline{S}(T) = S_c\left(T_P^*\right) + S_P\left(T_P^*\right)T_P, \tag{4.13}$$

où T_P^* est la température obtenue à l'itération précédente. En même temps il faut respecter la règle N° 3, c'est-à-dire $S_P(T_P^*) \leq 0$.

Lors de la linéarisation de $\overline{S}(T)$ en $S_c + S_P T_P$ on peut avoir :

- $S_{P\ optimum}$ donné par la pente de la courbe $S = f(T)$ en T_P^* (si cette pente est négative) ;
- $S_P > 0$, on a la divergence du procesus itératif (la règle N° 3 n'est pas vérifiée) ;
- $0 > S_P > S_{P\ optimum}$, il y a le risque de divergence ;
- $S_P \leq S_{P\ optimum} < 0$, convergence plus lente mais assurée.

En général, il y a plusieurs possibilités de linéarisation du terme source, illustrées par les exemples suivants, [50] :

Exemple 1

Soit $S = 5 - 4T$ donné. Alors plusieurs linéarisations sont possibles :

1. $S_c = 5$ et $S_P = -4$, c'est la forme optimum recommandée ;
2. $S_c = 5 - 4T_P^*$ et $S_P = 0$, utile lorsque l'expression de S est plus compliquée, ce qui n'est pas le cas ici ;
3. $S_c = 5 + 7T_P^*$ et $S_P = -11$, permet d'avoir une pente négative plus grande et de ralentir la convergence. Ceci est nécessaire s'il y a trop de non-linéarités dans le problème, car assure la convergence.

Exemple 2

Soit $S = 3 + 7T$. Dans ce cas, les linéarisations suivantes sont possibles :

1. $S_c = 3$ et $S_P = 7$, on a la divergence car la règle N° 3 n'est pas assurée ;
2. $S_c = 3 + 7T_P^*$ et $S_P = 0$, recommandé lorsqu'on a malgré tout $S_P \geq 0$;
3. $S_c = 3 + 9T_P^*$ et $S_P = -2$, la création artificielle de $S_P < 0$, qui ralentit la convergence.

Exemple 3

Soit $S = 4 - 5T^3$. Les linéarisations suivantes sont possibles :

1. $S_c = 4 - 5T_P^{*3}$ et $S_P = 0$, dans ce cas, on ne profite pas de la relation connue entre S et T ;
2. $S_c = 4$ et $S_P = -5T_P^{*2}$, linéarisation correcte mais la pente n'est pas assez grande ;
3. La méthode recommandée. On cherche la tangente à la courbe $S = f(T)$ en T_P^*

$$\left(\frac{dS}{dT}\right)^* = \frac{S - S^*}{T_P - T_P^*} \tag{4.14}$$

Ainsi, le terme source à l'itération courante est :

$$S = S^* + \left(\frac{dS}{dT}\right)^* \left(T_P - T_P^*\right). \tag{4.15}$$

En utilisant la relation (4.15) pour le terme source, considéré comme exemple, on obtient :

$$S = 4 - 5T_P^{*3} + \left(-15T_P^{*2}\right)\left(T_P - T_P^*\right) = 4 + 10T_P^{*3} - 15T_P^{*2}T_P\,, \tag{4.16}$$

d'où on obtient $S_c = 4 + 10T_P^{*3}$ et $S_P = -15T_P^{*2}$.

4. $S_c = 4 + 20T_P^{*3}$ et $S_P = -25T_P^{*2}$. La pente est plus raide, ce qui ralentit la convergence.

Si l'on considère que le terme source est dominant dans l'équation discrétisée on peut écrire cette équation ainsi :

$$S_c + S_P T_P \approx 0\,, \tag{4.17}$$

d'où on obtient la solution limite :

$$T_M = -\frac{S_c}{S_P}. \tag{4.18}$$

Si la valeur de la pente S_P est grande, la solution T_M tende vers T_P^*, tandis que pour une valeur plus petite de la pente, celle-ci implique un grand changement de T, de la valeur T_P^* à la valeur T_M. Dans certaines situations, le cas limite du terme source dominant est utilisé pour linéariser un terme source fortement non-linéaire et pour lequel on ne connaît pas la courbe analytique. Si l'on suppose que pour la valeur courante T_P^* on désire qu'à l'itération suivante la variable inconnue ne dépasse pas la valeur limite T_M, la linéarisation se fait comme suit :

- on exprime la dérivée au point P, ainsi

$$\left(\frac{dS}{dT}\right)^* = -\frac{S_P^*}{T_M - T_P^*}\ ; \tag{4.19}$$

- en introduisant la relation (4.19) dans l'équation (4.15) on obtient la linéarisation désirée

$$S = S^* \frac{T_M - T_P}{T_M - T_P^*}. \tag{4.20}$$

4.1.5 Traitement des conditions aux limites

On considère l'équation de conservation de l'énergie (4.1) dans le domaine $0 < x < L$ et le maillage unidimensionnel présenté à la figure 4.4

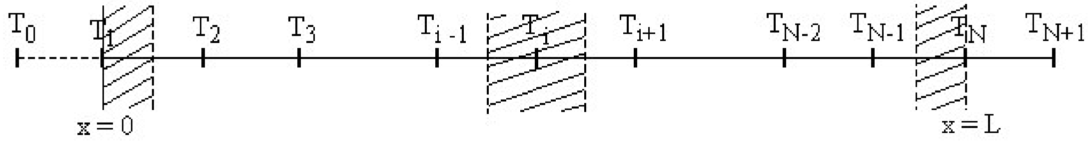


Fig. 4.4 *Maillage 1D en volumes finis*

L'intégration de l'équation (4.1) sur un volume de contrôle (VC) autour d'un noeud intérieur "i" donne :

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_{i+1/2} - \left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_{i-1/2} + \overline{S}_i(T_i)\Delta x = 0. \qquad (4.21)$$

En exprimant les dérivées sous la forme discrète, on obtient :

$$\lambda_{i+1/2}\frac{T_{i+1}-T_i}{\Delta x} - \lambda_{i-1/2}\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + \overline{S}_i(T_i)\Delta x = 0 \qquad i = 2, \dots, N-1, \qquad (4.22)$$

où $\overline{S}_i$ est la valeur moyenne de S_i sur le volume de contrôle autour du point "i".

En regroupant les termes l'équation (4.22) peut être écrite ainsi :

$$\lambda_{i-1/2}T_{i-1} - (\lambda_{i+1/2} + \lambda_{i-1/2})T_i + \lambda_{i+1/2}T_{i+1} = -\overline{S}_i(T_i)(\Delta x)^2. \qquad (4.23)$$

Si $\lambda_{i-1/2} = \lambda_{i+1/2} = \lambda$, l'équation (4.23) prend la forme suivante :

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = -G_i \qquad i = 2, \dots, N-1, \qquad (4.24)$$

où

$$G_i = \frac{\overline{S}_i(\Delta x)^2}{\lambda}.$$

Pour les points 1 et N situés aux frontières du domaine de calcul on intègre l'équation (4.1) sur un demi-volume de contrôle.

Les trois cas typiques de conditions aux limites rencontrées pour les problèmes de conduction thermique sont :

1. Température imposée (connue) à la frontière *(condition de type Dirichlet)* ;
2. Densité du flux thermique imposée, donc dT/dx connue *(condition de type Neumann)* ;
3. Densité du flux thermique spécifiée par un coefficient d'échange (h) et une température du fluide environnant (T_f) ou par un flux radiatif *(condition mixte ou de type Fourier)*

$$Q_N = \left(-\lambda \frac{dT}{dx}\right)_N = \begin{cases} h(T_f - T_N) \\ \varepsilon\sigma(T_f^4 - T_N^4) \end{cases}, \qquad (4.24a)$$

où ε est le coefficient d'émission et σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Conditions aux limites de type Dirichlet

Dans ce cas, si la température T_1 ou/et T_N est connue, il n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire au noeud 1 ou/et N. Quand on a une seule condition de type Dirichlet (au noeud 1 ou N) le nombre d'équations à résoudre est $N-1$. Si l'on a deux conditions aux limites de type Dirichlet (dans les points de frontière 1 et N) alors le nombre d'équations à résoudre est $N-2$. Pour $i=2$ de l'équation (4.23) on obtient :

$$\lambda_{2-1/2}T_1 - (\lambda_{2+1/2} + \lambda_{2-1/2})T_2 + \lambda_{2+1/2}T_3 = -\overline{S}_2(\Delta x)^2. \tag{4.25}$$

La température T_1 étant connue, le terme $\lambda_{2-1/2}T_1$ passe comme un terme source, au membre droite de l'équation, et la première équation à résoudre devient :

$$-(\lambda_{2+1/2} + \lambda_{2-1/2})T_2 + \lambda_{2+1/2}T_3 = -\overline{S}_2(\Delta x)^2 - \lambda_{2-1/2}T_1. \tag{4.26}$$

Pour $\lambda = cte$, l'équation (4.26) devient :

$$-2T_2 + T_3 = -\frac{\overline{S}_2(\Delta x)^2}{\lambda} - T_1. \tag{4.27}$$

Pour $i = N-1$ de l'équation (4.23) on obtient :

$$\lambda_{(N-1)-1/2}T_{N-2} - (\lambda_{(N-1)+1/2} + \lambda_{(N-1)-1/2})T_{N-1} + \lambda_{(N-1)+1/2}T_N = -\overline{S}_{N-1}(\Delta x)^2. \tag{4.28}$$

La température T_N étant connue, le terme $\lambda_{(N-1)+1/2}T_N$ passe comme un terme source et la dernière équation à résoudre devient :

$$\lambda_{(N-1)-1/2}T_{N-2} - (\lambda_{(N-1)+1/2} + \lambda_{(N-1)-1/2})T_{N-1} = -\overline{S}_{N-1}(\Delta x)^2 - \lambda_{(N-1)+1/2}T_N. \tag{4.29}$$

Pour $\lambda = cte$ l'équation (4.29) devient :

$$T_{N-2} - 2T_{N-1} = -\frac{\overline{S}_{N-1}(\Delta x)^2}{\lambda} - T_N. \tag{4.30}$$

Conditions aux limites de type Neumann

En intégrant l'équation (4.1) sur le demi-volume de contrôle (VC) illustré à la figure 4.5 on obtient :

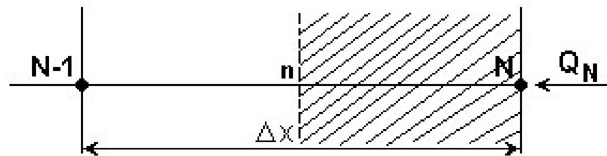


Fig. 4.5 *Traitement d'une condition à la limite de type flux imposé (Neumann)*

$$\int_{VC} \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) dV + \int_{VC} S dV = 0, \tag{4.31}$$

ce qui donne pour $dV = Adx = 1 \cdot dx$ (le cas unidimensionnel) :

$$\int_{n}^{N} \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) dx + \int_{n}^{N} S dx = 0, \tag{4.32}$$

et finalement après l'intégration, on obtient :

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_N - \left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_n + \bar{S}_N \frac{\Delta x}{2} = 0. \tag{4.33}$$

Comme la densité du flux thermique Q_N au point N s'exprime :

$$Q_N = -\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_N, \tag{4.34}$$

l'équation (4.33), en exprimant la dérivée au point "n" avec différences centrales, devient :

$$-Q_N - \lambda_n \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta x} + \bar{S}_N \frac{\Delta x}{2} = 0. \tag{4.35}$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.35), on obtient l'équation discrétisée, valable pour le point de frontière N, pour la condition à la limite de type Neumann (flux imposé) :

$$T_{N-1} - T_N = -\frac{\bar{S}_N (\Delta x)^2}{2\lambda_{N-1/2}} + \frac{Q_N \Delta x}{\lambda_{N-1/2}}. \tag{4.36}$$

Pour la condition à la limite de type Neumann homogène on a $Q_N = 0$. Le terme $\bar{S}_N$ est en fait la moyenne arithmétique entre le terme source du point N et le terme source de l'interface n du demi-volume de contrôle.

4.1.6 Algorithme de Thomas ou TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)

Cet algorithme permet de calculer la solution d'un système linéaire lorsque la matrice est tridiagonale. C'est notre cas, car les équations discrétisées dans le système linéaire s'écrivent :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i \qquad 1 \le i \le N, \tag{4.37}$$

où le maillage est présenté à la figure 4.6.

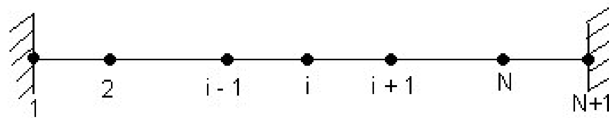


Fig. 4.6 *Application du TDMA dans le cas 1D*

La température T_i est exprimée en fonction des températures voisines T_{i-1} et T_{i+1}. Pour prendre en compte la forme spéciale des équations pour les points de frontière 1 et N il faut que :

$$c_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad b_N = 0. \tag{4.38}$$

Si, par exemple, la température T_1 est connue on a $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$ et $d_1 = T_1$. L'équation (4.37) pour $i=2$ est une relation entre T_1, T_2 et T_3, mais parce que T_1 est exprimée en fonction de T_2 ou est connue, la relation entre T_1, T_2 et T_3, est reduite à une relation entre T_2 et T_3, c'est-à-dire T_2 peut être exprimée en fonction de T_3. Le processus de substitution continue jusqu'à quand T_N est exprimée en fonction de T_{N+1} qui ne joue aucun rôle ($b_N = 0$), donc on obtient, dans cette étape, la valeur de la T_N. On commence ensuite le processus inverse où l'on détermine T_{N-1} en fonction de T_N, T_{N-2} en fonction de T_{N-1} et ainsi de suite T_2 en fonction de T_3 et T_1 en fonction de T_2. Dans le processus de substitution en avant les équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
&a_1T_1 = b_1T_2 + 0 + d_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = f(T_2) = \frac{b_1}{a_1}T_2 + \frac{d_1}{a_1}\ ;\\
&a_2T_2 = b_2T_3 + c_2T_1 + d_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = f(T_3)\ ;\\
&a_3T_3 = b_3T_4 + c_3T_2 + d_3 \quad \Rightarrow \quad T_3 = f(T_4)\ ;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{N-1}T_{N-1} = b_{N-1}T_N + c_{N-1}T_{N-2} + d_{N-1} \quad \Rightarrow \quad T_{N-1} = f(T_N)\ ;\\
&a_NT_N = 0 + c_NT_{N-1} + d_N \quad \Rightarrow \quad T_N = Q_N.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Dans cette étape on cherche les relations de type $T_i = f(T_{i+1})$ sous la forme,

$$T_i = P_iT_{i+1} + Q_i, \tag{4.40}$$

mais on peut écrire également la relation suivante :

$$T_{i-1} = P_{i-1}T_i + Q_{i-1} \tag{4.41}$$

En remplaçant l'équation (4.41) dans l'équation (4.37) on obtient :

$$a_iT_i = b_iT_{i+1} + c_i\left(P_{i-1}T_i + Q_{i-1}\right) + d_i. \tag{4.42}$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.42) sous la forme générale (4.41) on obtient les coefficients P_i et Q_i en fonction des coefficients P_{i-1} et Q_{i-1} :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}} \qquad Q_i = \frac{d_i + c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}}. \tag{4.43}$$

Pour démarrer le processus de récurrence on constate que pour $i=1$ l'équation (4.37) est déjà sous la forme (4.40) et les valeurs de P_1 et Q_1 sont données par les formules suivantes :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \qquad \text{et} \qquad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}. \tag{4.44}$$

Il est bien de préciser que les relations (4.44) sont obtenues si l'on remplace $c_1 = 0$ dans les relations (4.43).

À la fin du processus de récurrence on constate que $b_N = 0$ et donc $P_N = 0$ et de l'équation (4.40) on obtient :

$$T_N = Q_N. \tag{4.45}$$

À ce point, on est dans la situation de démarrer le processus de substitution en arrière en utilisant la relation (4.40).

Résumé de l'algorithme

1. Calculer P_1 et Q_1 en utilisant les relations (4.44) ;
2. Calculer P_i et Q_i, pour $i = 2 \div N$, avec les relations de récurrence (4.43) ;
3. Poser $T_N = Q_N$;
4. Utiliser l'équation $T_i = P_i T_{i+1} + Q_i$ de $i = N-1$ à 1 pour obtenir T_{N-1}, T_{N-2}, ..., T_1.

4.1.7 Exemples

Exemple 1

On considère une barre cylindrique, sans source de chaleur, ayant l'aire transversale $A = 10^{-2}\ m^2$ et la longueur $L = 0.5$ m. Les extrémités, A et B de la barre sont maintenues aux températures constantes de 100 °C et de 500 °C respectivement.

Calculer la distribution de la température le long de la barre. On connaît la conductivité thermique $\lambda = 1000$ W/mK.

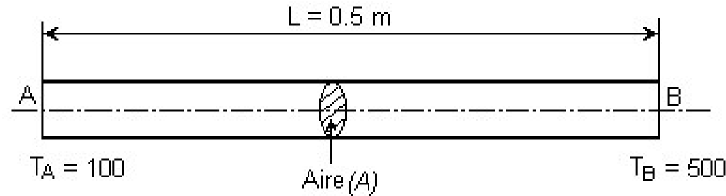


Fig. 4.7 *Barre cylindrique*

Solution

La distribution de la température est gouvernée par l'équation :

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) = 0. \tag{4.46}$$

On considère six points le long de la barre avec $\Delta x = 0.1$ m (fig. 4.8).

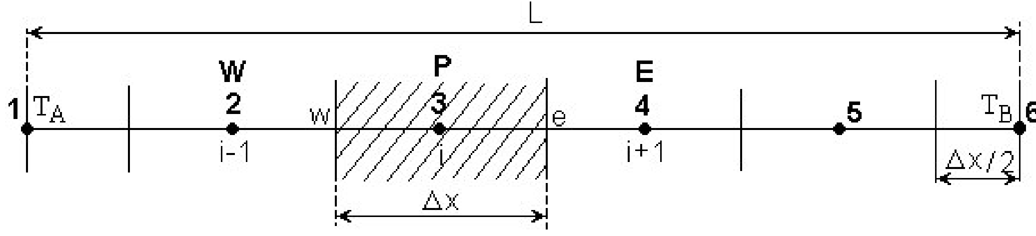


Fig. 4.8 *Maillage 1D*

Si l'on considère que $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ et $A_e = A_w = A$ pour les noeuds intérieurs (3 et 4) l'équation discrétisée est :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E , \tag{4.47}$$

où $\quad a_P = a_E + a_W \qquad a_W = a_E = \dfrac{\lambda}{\Delta x}$.

Pour les noeuds 2 et 5 on utilise la même équation que pour un noeud intérieur mais on tient compte que pour les noeuds voisins 1 et 6 les températures sont connues, T_A et T_B respectivement.

Pour le noeud 2 l'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_A . \tag{4.48}$$

Pour le noeud 5 l'équation discrétisée s'écrit :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_B . \tag{4.49}$$

Les équations à résoudre sont les suivantes (le nombre d'équations est égal à 4) :

$$a_i T_i = a_{i-1} T_{i-1} + a_{i+1} T_{i+1} \qquad i = 2 \div 5 . \tag{4.50}$$

En tenant compte que

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{1000}{0.1} = 10000 \qquad a_P = a_W + a_E = 10000 + 10000 = 20000 ,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{aligned} 2T_2 &= T_3 + T_A \\ 2T_3 &= T_2 + T_4 \\ 2T_4 &= T_3 + T_5 \\ 2T_5 &= T_4 + T_B \end{aligned} \tag{4.51}$$

En regroupant les termes, on obtient le système d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_A \\ 0 \\ 0 \\ T_B \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations ci-dessus comportant un nombre réduit d'équations peut être résolu, par exemple, en utilisant le logiciel MATHCAD (version MATHCAD 7 Professional, MathSoft Inc., 1997). La solution est :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 260 \\ 340 \\ 420 \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

La solution analytique de l'équation (4.46) est une distribution linéaire entre les valeurs de la température des points A et B, c'est-à-dire :

$$T(x) = \frac{T_B - T_A}{L} x + T_A = 800 \cdot x + T_A \quad . \tag{4.53}$$

À la figure 4.9 sont représentées les solutions analytique et numérique qui correspondent.

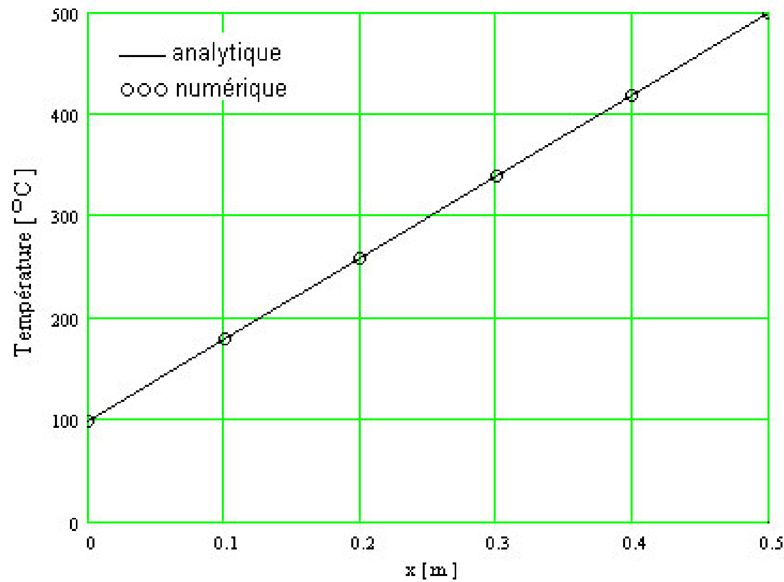


Fig. 4.9 *Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique*

Exemple 2

On considère une plaque très longue d'épaisseur $L = 20\,\text{mm}$, ayant la conductivité thermique constante $\lambda = 0.5\,\text{W/m/K}$ et une source de chaleur uniforme, $S = 1000\,\text{kW/m}^3$. Les faces de la plaque se trouvent à la température constante de $100\,°\text{C}$ et $200\,°\text{C}$ respectivement.

En supposant que les dimensions de la plaque dans les directions "y" et "z" soient très grandes et donc le gradient de la température est significatif dans la direction "x" seulement, calculer la distribution de la température et comparer les résultats numériques avec la solution analytique.

Solution

L'équation différentielle qui gouverne la distribution de la température est la suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) + S = 0\,. \tag{4.54}$$

Le domaine d'analyse est divisé en six noeuds, comme dans l'exemple précédent, avec $\Delta x = 0.004\,\text{m}$. L'aire $A = 1$ est considérée dans le plan $y - z$.

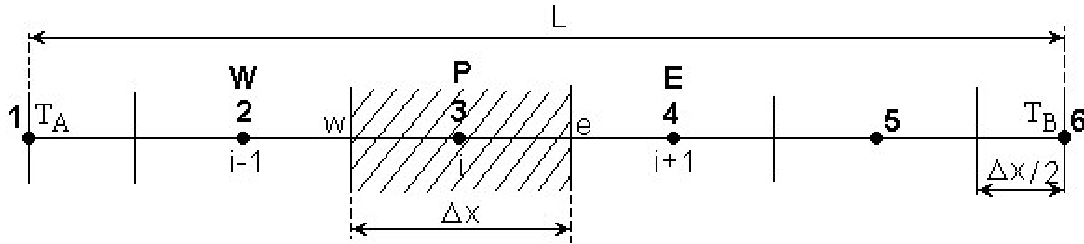


***Fig. 4.10** Maillage 1D*

L'intégration formelle, sur un volume de contrôle (VC), de l'équation (4.54) donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) dV + \int_{VC} S dV = 0\,. \tag{4.55}$$

La première intégrale est évaluée comme dans l'exemple précédent. La deuxième intégrale, qui contient le terme source, est évaluée en considérant une valeur moyenne de S sur le volume de contrôle. L'équation (4.55) peut être écrite ainsi :

$$\left[\left(\lambda A \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(\lambda A \frac{dT}{dx}\right)_w\right] + \bar{S}\Delta V = 0 \;; \tag{4.56}$$

$$\left[\lambda_e A\left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x}\right) - \lambda_w A\left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x}\right)\right] + \bar{S}A\Delta x = 0\,. \tag{4.57}$$

En regroupant les termes on obtient la forme générale de l'équation discrétisée, valable pour les noeuds 3 et 4 ainsi :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b\,, \tag{4.58}$$

où : $a_P = a_W + a_E$ $\quad a_W = \dfrac{\lambda_w}{\Delta x}$ $\quad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\Delta x}$ $\quad b = \overline{S}\Delta x\,.$

Pour le noeud 2 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin “W” corresponde au noeud “1” où la température est connue $T_W \equiv T_1 \equiv T_A$ et passe comme un terme source supplémentaire. L’équation discrétisée est donc :

$$a_P T_P = a_E T_E + b + a_W T_A\,. \tag{4.59}$$

Pour le noeud 5 on utilise la même équation discrétisée que pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) mais on tient compte que le noeud voisin “E” correspond au noeud “6” où la température est connue $T_E \equiv T_6 \equiv T_B$ et passe comme un terme source supplémentaire. L’équation discrétisée est :

$$a_P T_P = a_W T_W + b + a_E T_B\,. \tag{4.60}$$

En tenant compte que $\lambda_w = \lambda_e = \lambda$ et

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{0.5}{0.004} = 125 \qquad a_P = a_W + a_E = 125 + 125 = 250\,,$$

$$b = \overline{S}\Delta x = 1000000 \cdot 0.004 = 4000\,,$$

le système d’équations à résoudre est :

$$\begin{aligned}
250T_2 &= 125T_3 + 4000 + 125 \cdot T_A \\
250T_3 &= 125T_2 + 125T_4 + 4000 \\
250T_4 &= 125T_3 + 125T_5 + 4000 \\
250T_5 &= 125T_4 + 4000 + 125 \cdot T_B
\end{aligned}$$

En regroupant les termes et en remplaçant les valeurs de T_A et T_B on obtient le système “tri-diagonal” à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 250 & -125 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & -125 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16500 \\ 4000 \\ 4000 \\ 29000 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

La solution numérique du système (4.61) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 184 \\ 236 \\ 256 \\ 244 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

La solution analytique est obtenue en intégrant l'équation (4.54) et en imposant les conditions aux limites spécifiées :

$$T(x) = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{S}{2\lambda}\left(L - x\right)\right]x + T_A \,. \tag{4.63}$$

La comparaison des résultats numériques, obtenus avec la méthode des volumes finis, avec la solution analytique est présentée au tableau 4.1 et à la fig. 4.11.

Tableau 4.1 Comparaison : solution numérique – solution analytique

Numéro du noeud	**2**	**3**	**4**	**5**
x [m]	0.004	0.008	0.012	0.016
Solution numérique	184	236	256	244
Solution analytique	184	236	256	244
Erreur %	0	0	0	0

On constate que malgré un maillage très grossier les solutions numérique et analytique correspondent. Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G.

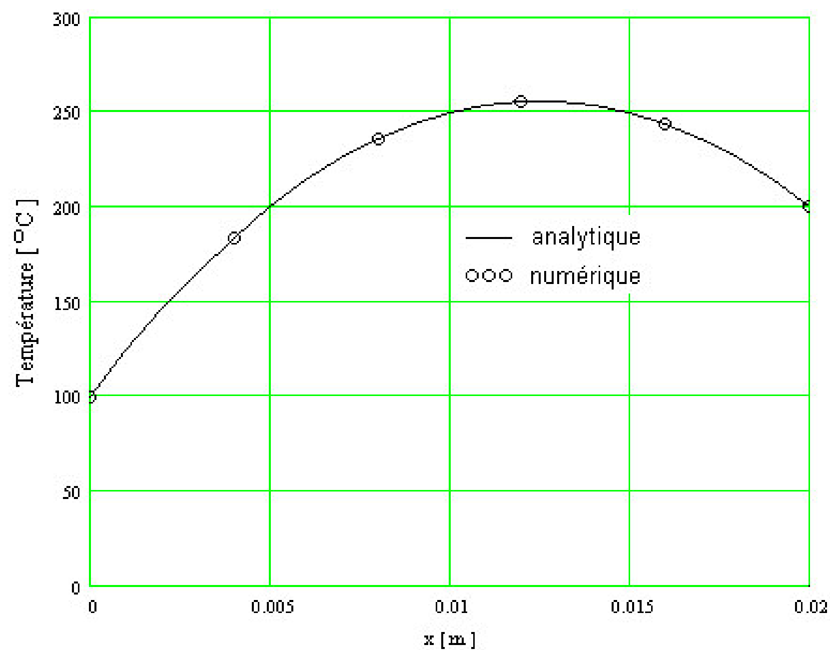


Fig. 4.11 *Comparaison des résultats numérique avec la solution analytique*

Exemple 3

On considère une barre cylindrique (fig. 4.12) de l'aire A avec une extrémité maintenue à la température constante de $100\,°C$ (T_B) et l'autre extrémité est isolée (le flux de chaleur est nul). Sur le long de la barre il y a un échange de chaleur par convection dépendante de la température. La température du milieu extérieur est de $20\,°C$.

Calculer la distribution de la température et comparer les résultats avec la solution analytique.

On connaît : $L = 1\,\text{m}$, $hP/(\lambda A) = 25\,\text{m}^{-2}$.

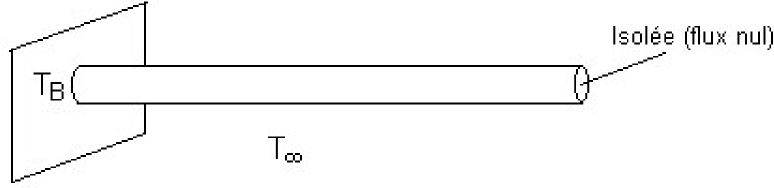


Fig. 4.12 *Géometrie de l'exemple 3*

Solution

L'équation diférentielle qui gouverne le transfert thermique dans ce cas est :

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda A\,\frac{dT}{dx}\right) - hP\left(T - T_\infty\right) = 0\,, \qquad (4.64)$$

où h est le coefficient de transfert thermique par convection, P est le périmètre, λ est la conductivité thermique et T_∞ est la température du milieu extérieur.
La solution analytique est donnée par la relation suivante [48] :

$$T(x) = \left(T_B - T_\infty\right)\frac{\cosh\left[n\left(L - x\right)\right]}{\cosh\left(nL\right)} + T_\infty\,, \qquad (4.65)$$

où $n^2 = hP/(\lambda A)$ (il faut noter que $\lambda A = cte$).
Le maillage utilisé est celui de la figure 4.13.

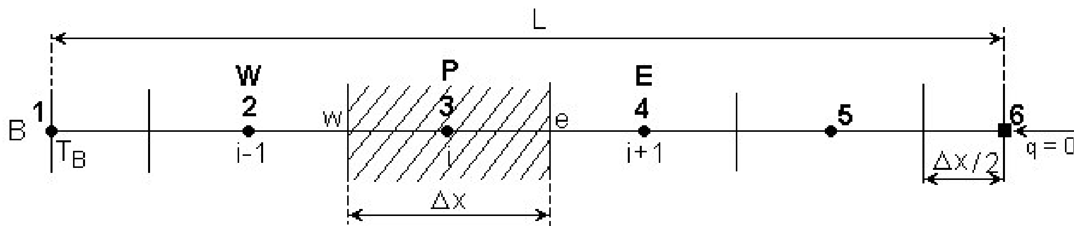


Fig. 4.13 *Maillage utilisé pour l'exemple 3*

Lorsque $\lambda A = \text{cte}$, l'équation (4.64) peut être écrite ainsi :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) - n^2\left(T - T_\infty\right) = 0 \qquad \text{où} \qquad n^2 = hP / \lambda A . \tag{4.66}$$

L'intégration de l'équation (4.66) sur le volume de contrôle, autour du point P, donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) dV - \int_{VC} n^2\left(T - T_\infty\right) dV = 0 . \tag{4.67}$$

La première intégrale de l'équation (4.67) sera traitée comme dans les exemples 1 et 2. La deuxième intégrale, à cause du terme source, est évaluée en supposant que la quantité à intégrer est localement constante sur chaque volume de contrôle et donc :

$$\left(A\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(A\frac{dT}{dx}\right)_w - \left[n^2\left(T_P - T_\infty\right)A\Delta x\right] = 0 . \tag{4.68}$$

Pour les noeuds intérieurs l'équation discrétisée est :

$$\frac{T_E - T_P}{\Delta x} + \frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2\left(T_P - T_\infty\right)\Delta x = 0 . \tag{4.69}$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\right)T_P = \frac{1}{\Delta x}T_W + \frac{1}{\Delta x}T_E + n^2 \Delta x T_\infty - n^2 \Delta x T_P . \tag{4.70}$$

Pour un noeud intérieur (les noeuds 3, 4 et 5) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b , \tag{4.71}$$

où $\quad a_W = a_E = \dfrac{1}{\Delta x} \qquad a_P = a_W + a_E - S_P \qquad b = S_c = n^2 \Delta x T_\infty$

$$S_P = -n^2 \Delta x .$$

Le terme source dans l'équation ci-dessus est identifié comme $S = S_c + S_P T_P$.

Pour le noeud 2 (pour le noeud 1 ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire, la température étant connue) est valable la même équation que pour un noeud intérieur où le voisin "W" correspond à la température du point "1", $T_W = T_1 = T_B$. Le terme qui contient la température du point "1" est interprété comme un terme source. L'équation discrétisée, pour le noeud "2", est :

$$a_P T_P = a_E T_E + b + a_W T_B , \tag{4.72}$$

où $\quad a_W = a_E = \dfrac{1}{\Delta x} \qquad a_P = a_W + a_E - S_P \qquad b = S_c = n^2 \Delta x T_\infty .$

Pour le noeud "6" on intégre l'équation (4.66) sur le demi-volume de contrôle :

$$\int_{1/2VC} \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)dV - \int_{1/2VC} n^2 (T - T_\infty) dV = 0 \ ; \qquad (4.73)$$

$$\left(A\frac{dT}{dx}\right)_P - \left(A\frac{dT}{dx}\right)_w - n^2 (T_P - T_\infty) A\frac{\Delta x}{2} = 0 .$$

Parce que le flux dans le point P est nul ($q_P = -\lambda A\left(\frac{dT}{dx}\right)_P = 0$), on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$0 - A\frac{T_P - T_W}{\Delta x} - n^2 (T_P - T_\infty) A\frac{\Delta x}{2} = 0 . \qquad (4.74)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.74) on obtient :

$$a_P T_P = a_W T_W + b , \qquad (4.75)$$

où $\quad a_W = \frac{1}{\Delta x} \qquad a_P = a_W - S_P \qquad b = S_c = n^2 \frac{\Delta x}{2} T_\infty \qquad S_P = -n^2 \frac{\Delta x}{2}$.

En tenant compte que

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{0.2} = 5 \qquad n^2 \Delta x T_\infty = 25 \cdot 0.2 \cdot 20 = 100 \qquad - n^2 \Delta x = -25 \cdot 0.2 = -5 ,$$

le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{aligned}
15T_2 &= 5T_3 + 100 + 5T_B \\
15T_3 &= 5T_2 + 5T_4 + 100 \\
15T_4 &= 5T_3 + 5T_5 + 100 \\
15T_5 &= 5T_4 + 5T_6 + 100 \\
7.5T_6 &= 5T_5 + 50
\end{aligned}$$

En regroupant les termes on obtient le système d'équations à résoudre :

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \qquad (4.76)$$

La solution numérique est la suivante :

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.569 \\ 31.707 \\ 24.553 \\ 21.951 \\ 21.301 \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

Dans le tableau 4.2 on compare les résultats numériques avec la solution analytique.

Tableau 4.2 Comparaison : solution numérique – solution analytique

Noeud	*x [m]*	*Numérique*	*Analytique*	*Erreur %*
2	0.2	50.569	49.439	-2.28
3	0.4	31.707	30.853	-2.76
4	0.6	24.553	24.056	-2.06
5	0.8	21.951	21.663	-1.33
6	1.0	21.301	21.078	-1.05

La précision de la solution numérique peut être augmentée en utilisant un maillage plus fin. Dans le tableau 4.3 et à la figure 4.14 sont présentés les résultats numériques et les erreurs pour un maillage de 21 noeuds ($\Delta x = 0.05$ m, quatre fois plus petit). Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G.

Tableau 4.3 Comparaison : solution numérique – solution analytique

Noeud	*x [m]*	*Numérique*	*Analytique*	*Erreur %*
2	0.2	49.515	49.439	-0.150
3	0.4	30.910	30.853	-0.180
4	0.6	24.088	24.056	-0.130
5	0.8	21.682	21.663	-0.087
6	1.0	21.092	21.078	-0.066

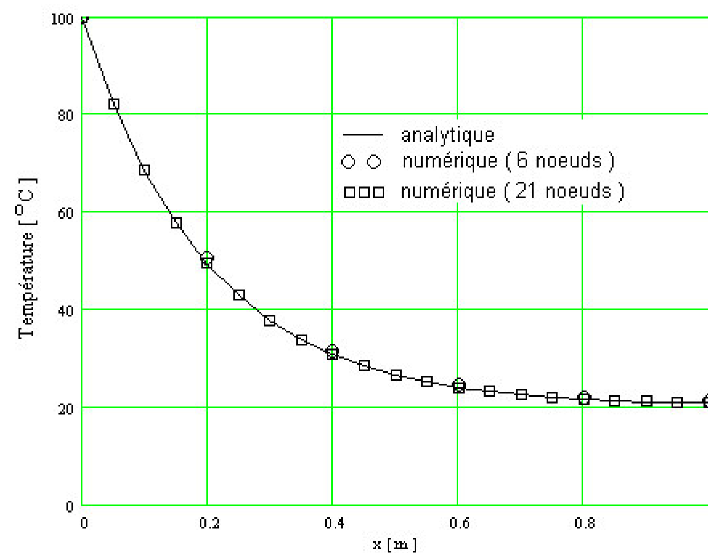


***Fig. 4.14** Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique*

4.2 Conduction thermique 1D instationnaire

4.2.1 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation différentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + S\,, \tag{4.78}$$

où ρ est la densité de masse (kg/m^3), c_p étant la chaleur spécifique à pression constante (J/KgK).

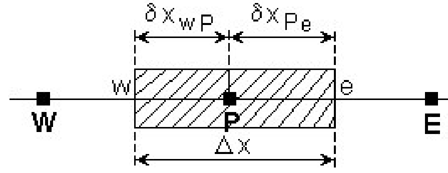


Fig. 4.15 *Volume de contrôle 1D*

On considère le volume de contrôle unidimensionnel de la figure 4.15. L'intégration de l'équation (4.78) sur le volume de contrôle et sur un interval de temps de t au $t + \Delta t$ donne :

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_{VC} \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t}\, dV\, dt = \int_t^{t+\Delta t}\int_{VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dV\, dt + \int_t^{t+\Delta t}\int_{VC} S\, dV\, dt\,. \tag{4.79}$$

L'équation intégrée (4.79) peut être écrite ainsi :

$$\int_w^e \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\right] dV = \int_t^{t+\Delta t}\left[\left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S}\Delta V\, dt\,. \tag{4.80}$$

où A est l'aire transversale du volume de contrôle, ΔV étant le volume de celui-ci égale à $A\Delta x$.

Si la température du noeud P est supposée la même sur le volume de contrôle, la partie gauche de l'équation (4.80) peut être écrite ainsi :

$$\int_{VC}\left[\int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\right] dV = \rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\Delta V\,, \tag{4.81}$$

où T_P^0 est la température à l'instant t et T_P à l'instant $t + \Delta t$.

En utilisant un schéma avec des différences centrales pour les termes de conduction de la part droite de l'équation (4.81) on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} \left[\lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \overline{S}\Delta x \, dt, \tag{4.82}$$

Pour calculer la partie droite de l'équation (4.82) il faut connaître la variation de T_P, T_W et T_E dans le temps. Pour cela il y a de nombreuses possibilités, on peut prendre la température à l'instant t, T_P^0, à l'instant $t+\Delta t$, T_P ou une combinaison linéaire des températures à l'instant t et $t+\Delta t$. La forme générale d'intégration temporelle s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = \begin{cases} T_P^0 \Delta t \\ T_P \Delta t \\ \left(f T_P + (1-f) T_P^0\right)\Delta t \end{cases}, \tag{4.83}$$

où $0 \le f \le 1$ est un facteur de pondération.

En appliquant la forme générale d'intégration temporelle (4.83) aux points T_P, T_W et T_E on obtient :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t}\right)\Delta x = {} & f\left[\frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{\delta x_w}\right] \\ & + (1-f)\left[\frac{\lambda_e \left(T_E^0 - T_P^0\right)}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w \left(T_P^0 - T_W^0\right)}{\delta x_w}\right] + \overline{S}\Delta x \end{aligned} . \tag{4.84}$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.84) on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} + f\left(\frac{\lambda_e}{\delta x_e} + \frac{\lambda_w}{\delta x_w}\right)\right] T_P = {} & \frac{\lambda_e}{\delta x_e}\left[f T_E + (1-f) T_E^0\right] + \frac{\lambda_w}{\delta x_w}\left[f T_W + (1-f) T_W^0\right] \\ & + \left[\rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1-f)\frac{\lambda_e}{\delta x_e} - (1-f)\frac{\lambda_w}{\delta x_w}\right] T_P^0 + \overline{S}\Delta x \end{aligned} \tag{4.85}$$

Si l'on identifie les coefficients de T_W et T_E comme a_W et a_E on peut écrire l'équation (4.85) sous la forme générale discrétisée :

$$\begin{aligned} a_P T_P = {} & a_W\left[f T_W + (1-f) T_W^0\right] + a_E\left[f T_E + (1-f) T_E^0\right] \\ & + \left[a_P^0 - (1-f) a_W - (1-f) a_E\right] T_P^0 + b \end{aligned} , \tag{4.86}$$

où $\quad a_P = f(a_W + a_E) + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$;

$$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \qquad b = \overline{S}\Delta x \quad .$$

La forme exacte de l'équation discrétisée dépend de la valeur du facteur f. Lorsque $f=0$ on utilise seulement les températures T_P^0, T_W^0 et T_E^0 à l'instant t, dans le membre droit de l'équation (4.86), pour calculer T_P à l'instant $t+\Delta t$; un tell schéma s'appelle *schéma explicite*. Lorsque $0<f\leq 1$, on utilise tant les températures à l'instant t que les températures à l'instant $t+\Delta t$; le schéma obtenu s'appelle *le schéma implicite.* Le cas limite quand $f=1$ le schéma s'appelle *totalement implicite*. Si $f=1/2$ le schéma s'appelle *schéma Crank-Nicolson ou semi-implicite.*

4.2.2 Schéma explicite

Dans le cas du schéma explicite le terme source est linéarisé par l'expression $b = S_c + S_P T_P^0$. En remplaçant $f=0$ dans l'équation (4.86) on obtient la *discrétisation explicite* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + \left[a_P^0 - (a_W + a_E - S_P)\right] T_P^0 + S_c, \tag{4.87}$$

où $a_P = a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho\, c_p \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \qquad a_W = \dfrac{\lambda_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\delta x_e}$.

La règle N° 2 n'est pas toujours satisfaite. Le coefficient de T_P^0 peut être regardé comme le coefficient du “voisin” de T_P dans la “direction” temps ou un coefficient voisin qui fait la liaison entre les valeurs de T à l'instant t et celles à l'instant $t+\Delta t$. Pour que le coefficient de T_P^0 soit positif il faut $a_P^0 - a_W - a_E \geq 0$. Dans le cas général la condition devient :

$$\rho\, c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\lambda_e}{\delta x_e} - \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \geq 0. \tag{4.88}$$

Si $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$ et $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ la condition (4.88) devient :

$$\rho\, c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \frac{2\lambda}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{2\lambda} \tag{4.89}$$

Si l'on note $\alpha = \lambda / \rho c_p$, on obtient le nombre de Fourier qui doit être inférieur ou égal à $1/2$:

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \tag{4.90}$$

La relation (4.90) représente le critère de stabilité pour les schémas explicites.

Remarques

- le critère de convergence du schéma utilisé, pour l'intégration dans le temps, résulte d'une considération physique (la règle N° 2).
- si l'on réduit Δx pour améliorer la précision spatiale, il faut diminuer beaucoup Δt ($\propto 1/(\Delta x)^2$).

4.2.3 Schéma Crank-Nicolson

En remplaçant $f = 1/2$ dans l'équation (4.86) on obtient la *discrétisation Crank-Nicolson* de l'équation de conduction thermique 1D instationnaire :

$$a_P T_P = a_E\left[\frac{T_E + T_E^0}{2}\right] + a_W\left[\frac{T_W + T_W^0}{2}\right] + \left[a_P^0 - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2}\right]T_P^0 + b\,, \tag{4.91}$$

où $a_P = \frac{1}{2}(a_W + a_E) + a_P^0 - \frac{1}{2}S_P \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t}.$

$a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e} \qquad b = S_c + \frac{1}{2}S_P T_P^0$

À l'instant $t + \Delta t$ plusieurs inconnues sont présentes dans l'équation (4.91), le schéma est donc implicite et les équations doivent être résolues simultanément pour tous les noeuds à chaque pas dans le temps.

Mathématiquement le schéma Crank-Nicolson est inconditionnellement stable, mais *numériquement* la convergence vers une solution physiquement acceptable n'est pas assurée (par exemple, des solutions oscillantes d'amplitude constante ou décroissante).

La règle N° 2 est satisfaite uniquement lorsque

$$a_P^0 - \frac{a_E + a_W}{2} = \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\lambda_e}{2\delta x_e} - \frac{\lambda_w}{2\delta x_w} \geq 0\,. \tag{4.92}$$

Si $\delta x_e = \delta x_w = \Delta x$ et $\lambda_e = \lambda_w = \lambda$ la condition (4.92) devient :

$$\Delta t \leq \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1\,. \tag{4.93}$$

Remarque

La relation (4.93) est moins restrictive que la relation (4.90) associée au schéma explicite. La précision du schéma Crank-Nicolson est de second ordre dans le temps donc pour le même pas dans le temps la précision des résultats est plus grande que dans le cas du schéma explicite.

4.2.4 Schéma totalement implicite

Lorsque $f = 1$, dans l'équation (4.86) on obtient le schéma totalement implicite. L'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0 + S_c\,, \tag{4.94}$$

où $a_P = a_P^0 + a_W + a_E - S_P \qquad a_W = \frac{\lambda_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \frac{\lambda_e}{\delta x_e}.$

La règle N° 2 est toujours vérifiée, donc le schéma totalement implicite (TI) est inconditionnellement stable. La précision du schéma TI est de premier ordre dans le temps, donc un petit pas dans le temps est nécessaire pour augmenter la précision des résultats.

4.2.5 Exemples

Par la suite on démontre les propriétés des schémas de discrétisation explicite et implicite en comparant les résultats numériques, pour un problème 1D instationnaire, avec la solution analytique.

Exemple 1

Une plaque métallique mince se trouve initialement à une température uniforme de $200\,°C$. À l'instant $t = 0$ la température de la paroi "East" de la plaque est brusquement réduite à $0\,°C$. Les autres surfaces de la plaque sont isolées.

1. Utiliser le schéma explicite de la méthode des volumes finis, pour un pas de temps adéquate, pour calculer la distribution transitoire de la température et comparer les résultats avec la solution analytique aux instants (i) $t = 40\,s$, (ii) $t = 80\,s$, (iii) $t = 120\,s$;
2. Calculer la solution numérique pour un pas de temps donné par la formule (4.90), pour $t = 40\,\text{s}$ et comparer avec la solution analytique ;

Les données du problème sont : la longueur de la plaque $L = 2\,\text{cm}$, la conductivité thermique $\lambda = 10\,\text{W/mK}$ et $\rho\, c_p = 10^7\ \text{J/m}^3\text{K}$.

Solution

L'équation differentielle de la conduction thermique 1D instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{4.95}$$

La condition initiale est : $T = 200\,°\text{C}$ à $t = 0$

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,\ t > 0\ ;$$

$$T = 0 \quad \text{pour} \quad x = L,\ t > 0.$$

La solution analytique est donnée par la relation suivante [28] :

$$T(x,t) = T(x,0)\,\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\exp\left(-\alpha\lambda_n^2 t\right)\cos(\lambda_n x), \tag{4.96}$$

où $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}$ et $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho c_p}$.

On considère six points sur le domaine de calcul avec $\Delta x = 0.004\,\text{mm}$ (fig. 4.16).

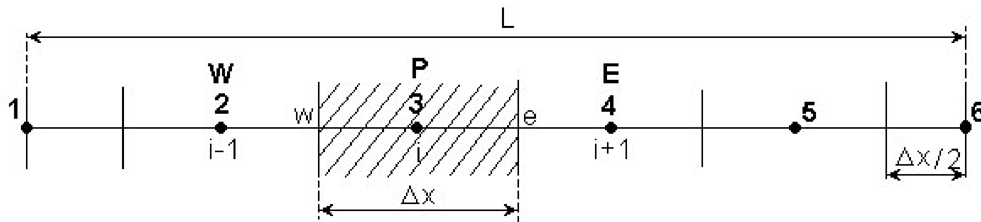


Fig. 4.16 *Maillage pour le problème de l'exemple 1.*

Pour un noeud intérieur (les noeuds 2, 3 et 4) l'équation discrétisée obtenue de l'équation (4.87) pour $S = 0$ est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + a_E T_E^0 + \left[a_P^0 - a_W - a_E\right] T_P^0, \tag{4.97}$$

où $\quad a_P = a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \qquad a_W = \dfrac{\lambda_w}{\Delta x} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\Delta x}.$

Pour le noeud 1 (noeud situé sur la frontière), la condition à la limite impose d'intégrer l'équation (4.95) sur un demi-volume de contrôle. L'équation discrétisée ainsi obtenue, pour le noeud 1, est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + \left(a_P^0 - a_E\right) T_P^0, \tag{4.98}$$

où $\quad a_P = a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x}{2\Delta t} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\Delta x}.$

Pour le noeud 6 (noeud de frontière), la condition à la limite étant de type Dirichlet, ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire. On utilise la même équation que pour un noeud intérieur, mais comme la température du point 6 est connue ($T_c = T_6 = 0\,°\mathrm{C}$) le terme qui contient la température du point 6 passe comme un terme source. Ainsi, on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 5 :

$$a_P T_P = a_W T_W^0 + \left(a_P^0 - a_W - a_E\right) T_P^0 + a_E T_C, \tag{4.99}$$

où $\quad a_P = a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \qquad a_W = \dfrac{\lambda_w}{\Delta x} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\Delta x}.$

Le pas dans le temps Δt doit satisfaire la condition de stabilité (4.90), donc :

$$\Delta t \le \frac{\rho c_p (\Delta x)^2}{2\lambda} = \frac{10^7 \cdot (0.004)^2}{2 \cdot 10} = 8\,\mathrm{s}.$$

Parce que $\Delta t \le 8\,\mathrm{s}$ on choisi $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$ et on trouve :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{10}{0.004} = 2500 \qquad \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2} = 20000\ ;$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2 \cdot 2} = 10000.$$

Après la substitution des valeurs numériques, dans les équations (4.97), (4.98) et (4.99) et simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\text{Noeud 1 :} && 100T_P = 25T_E^0 + 75T_P^0 \\
&\text{Noeuds } 2 \div 4 \text{ :} && 200T_P = 25T_W^0 + 25T_E^0 + 150T_P^0 \\
&\text{Noeud 5 :} && 200T_P = 25T_W^0 + 150T_P^0 + 25T_c
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Dans le tableau 4.4 on présente un exemple de calcul, en utilisant les équations (4.100) pour les deux premières pas de temps.

Tableau 4.4

Temps	***Noeud 1***	***Noeud 2***	***Noeud 3***	***Noeud 4***	***Noeud 5***
t= 0 s	$T_1^0 = 200$	$T_2^0 = 200$	$T_3^0 = 200$	$T_4^0 = 200$	$T_5^0 = 200$
1	$100T_1^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 75 \cdot 200$	$200T_2^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_3^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 0$
t=2 s	$T_1^1 = 200$	$T_2^1 = 200$	$T_3^1 = 200$	$T_4^1 = 200$	$T_5^1 = 175$
2	$100T_1^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 75 \cdot 200$	$200T_2^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_3^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^2 =$ $25 \cdot 200$ $+ 25 \cdot 175$ $+ 150 \cdot 200$	$200T_4^1 =$ $25 \cdot 200$ $+ 150 \cdot 175$ $+ 25 \cdot 0$
t=4 s	$T_1^2 = 200$	$T_2^2 = 200$	$T_3^2 = 198.72$	$T_4^1 = 196.87$	$T_5^2 = 156.25$

Les résultats numériques de l'exemple 1 sont présentés au tableau 4.5.

Tableau 4.5

Temps [s]	***Numéro du noeud***					
	1	2	3	4	5	6
	$x = 0$	$x = 0.004$	$x = 0.008$	$x = 0.012$	$x = 0.016$	$x = 0.02$
0	200	200	200	200	200	200
2	200	200	200	200	175	0
4	200	200	200	196.87	156.25	0
6	200	200	199.6	192.18	141.79	0
8	200	199.95	198.73	186.82	130.37	0
10	199.98	199.8	197.39	181.25	121.13	0
12	199.94	199.52	195.67	175.75	113.5	0
14	199.84	199.09	193.66	170.46	107.09	0
16	199.65	198.51	191.44	165.44	101.63	0
18	199.36	197.77	189.08	160.71	96.9	0
20	198.96	196.88	186.62	156.28	92.76	0

Le tableau 4.6 montre les résultats numériques et analytiques aux instants 40, 80 et $120\,\text{s}$.
À la figure 4.17 on présente la comparaison des résultats numériques obtenus pour différents pas de temps avec la solution analytique (6 noeuds). La comparaison des résultats numériques et analytiques aux différents instants de temps est présentée à la figure 4.18 (21 noeuds).

Tableau 4.6

Temps [s]	***Noeud***	***Numérique***	***Analytique***	***Erreur %***
$t = 40$ s	1	188.026	189.861	0.96
	2	182.196	183.814	0.88
	3	162.767	163.708	0.57
	4	125.662	125.712	0.039
	5	69.407	69.045	-0.52
	6	0	0	0
$t = 80$ s	1	153.526	154.462	0.6
	2	146.467	147.265	0.54
	3	125.610	126.080	0.37
	4	92.177	92.329	0.16
	5	48.851	48.850	-0.002
	6	0	0	0
$t = 120$ s	1	121.015	121.361	0.28
	2	115.150	115.460	0.26
	3	98.080	98.304	0.22
	4	71.376	71.500	0.17
	5	37.574	37.624	0.13
	6	0	0	0

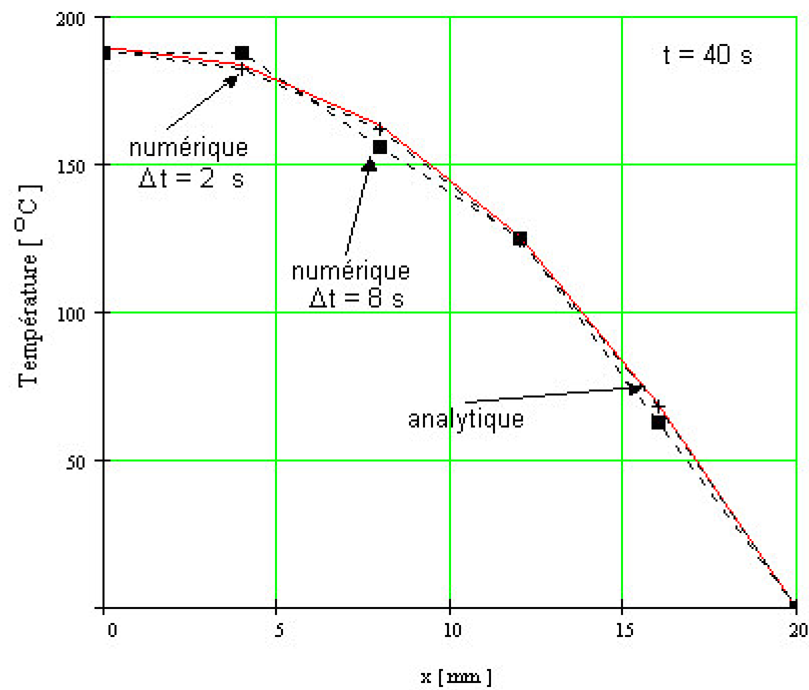


Fig. 4.17 *Comparaison des résultats pour différents pas de temps.*

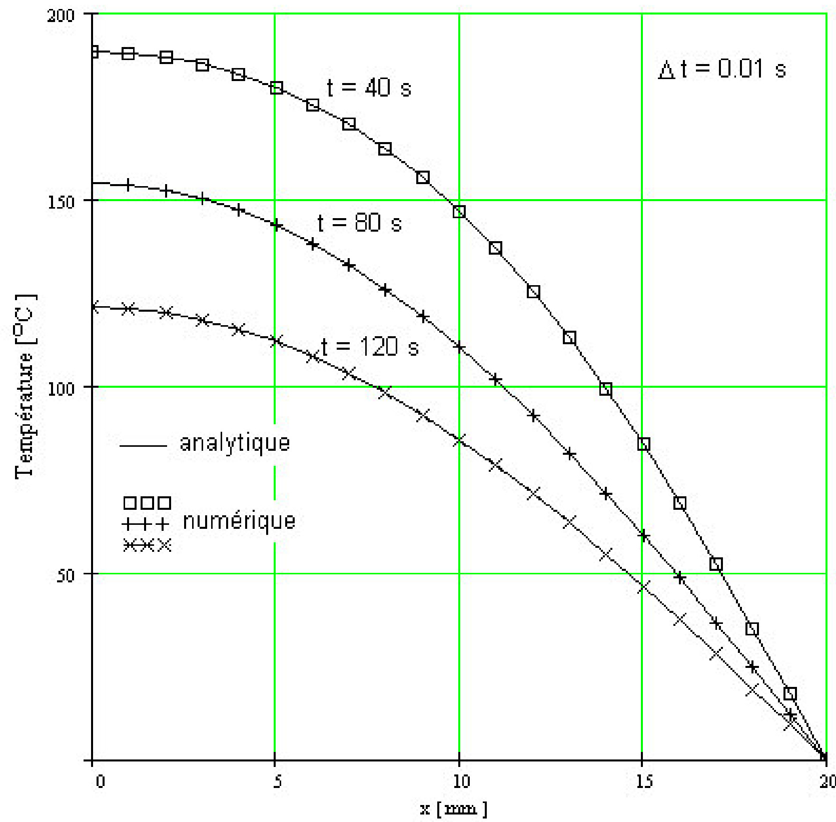


Fig. 4.18 *Comparaison des résultats numériques (maillage à 21 noeuds) et analytiques aux différents instants de temps (méthode explicite).*

Exemple 2

Résoudre le problème de l'exemple 1 en utilisant le schéma totalement implicite et comparer les résultats numériques obtenus avec la méthode implicite avec ceux obtenus avec la méthode explicite, pour un pas de temps de $8\,\text{s}$.

Solution

On utilise le même maillage de la figure 4.16. L'équation discrétisée, en utilisant le schéma totalement implicite, pour un noeud intérieur du domaine de calcul (*les noeuds 2, 3, et 4*) est celle décrite par l'équation (4.94) mais avec le terme source nul, c'est-à-dire :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_P^0 T_P^0, \tag{4.101}$$

où $a_P = a_P^0 + a_W + a_E \qquad a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$;

$a_W = \dfrac{\lambda_w}{\Delta x} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\Delta x}$.

Pour les noeuds situés sur la frontière 1 et 5 un traitement spécial s'impose. Ainsi, pour *le noeud 1* l'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_P^0 T_P^0, \tag{4.102}$$

où $\quad a_P = a_P^0 + a_E \qquad a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\Delta x}.$

Pour *le noeud 5* l'équation discrétisée, en tenant compte que $T_E \equiv T_6 = T_c$ (connue), est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_P^0 T_P^0 + a_E T_c, \tag{4.103}$$

où $\quad a_P = a_W + a_E + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e}{\Delta x} \qquad a_W = \dfrac{\lambda_w}{\Delta x}.$

Même si la méthode implicite permet d'utiliser un pas de temps quelqonque, par la suite nous allons utiliser un pas de temps raisonable, $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$, pour assurer une bonne précision des résultats. On a donc :

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{10}{0.004} = 2500 \qquad \rho c_p \frac{\Delta x}{\Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2} = 20000 \;;$$

$$\rho c_p \frac{\Delta x}{2 \cdot \Delta t} = 10^7 \cdot \frac{0.004}{2 \cdot 2} = 10000.$$

Après la substitution des valeurs numériques dans les équations (4.101), (4.102) et (4.103) et après simplifications, on obtient :

$$\begin{array}{ll} \text{Noeud } 1: & 125T_P = 25T_E + 100T_P^0 \\ \text{Noeuds } 2 \div 4: & 250T_P = 25T_W + 25T_E + 200T_P^0 \\ \text{Noeud } 5: & 250T_P = 25T_W + 200T_P^0 + 25T_c \end{array} \tag{4.104}$$

En tenant compte que $T_c = 0$ le système d'équations algébriques à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 125 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 250 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 250 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 250 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100T_1^0 \\ 200T_2^0 \\ 200T_3^0 \\ 200T_4^0 \\ 200T_5^0 \end{bmatrix} \tag{4.105}$$

On constate que l'équation pour chaque point contient les températures inconnues des points voisins. La méthode implicite nécessite la résolution simultanée du système d'équations (4.105). Les valeurs de la température du pas de temps précédent sont utilisées seulement pour le calcul du membre droit de l'équation matricielle (4.105).

Le tableau 4.7 et la figure 4.19 présentent les résultats numériques en comparaison avec la solution analitique (pour un maillage de 6 noeuds). Le code source en Fortran est présenté à l'Annexe G (THER1Di2)

Tableau 4.7

Temps [s]	***Noeud***	***Numérique***	***Analytique***	***Ereur %***
$t = 40\,\text{s}$	1	187.419	189.861	1.28
	2	181.853	183.814	1.06
	3	163.162	163.708	0.33
	4	126.868	125.712	-0.91
	5	70.605	69.045	-2.25
	6	0	0	0
$t = 80\,\text{s}$	1	153.719	154.462	0.48
	2	146.754	147.265	0.34
	3	126.087	126.080	-0.005
	4	92.739	92.329	-0.44
	5	49.241	48.850	-0.8
	6	0	0	0
$t = 120\,\text{s}$	1	121.524	121.361	-0.13
	2	115.656	115.460	-0.16
	3	98.559	98.304	-0.25
	4	71.766	71.501	-0.37
	5	37.797	37.624	-0.45
	6	0	0	0

À la figure 4.20 on présente une comparaison, des résultats numériques à l'instant $t = 40\,\text{s}$, obtenus en utilisant les schémas explicite et implicite, avec la solution analytique pour un pas de temps de $\Delta t = 8\,\text{s}$. On constate que le schéma explicite, pour $\Delta t = 8\,\text{s}$, donne des oscillations, tandis que le schéma implicite donne des résultats en bon accord avec la solution analytique. Ceci montre l'avantage du schéma implicite qui permet d'utiliser un pas de temps plus grand. Il faut signaler toutefois qu'une bonne précision sera obtenue en utilisant tout de même un pas de temps plus petit.

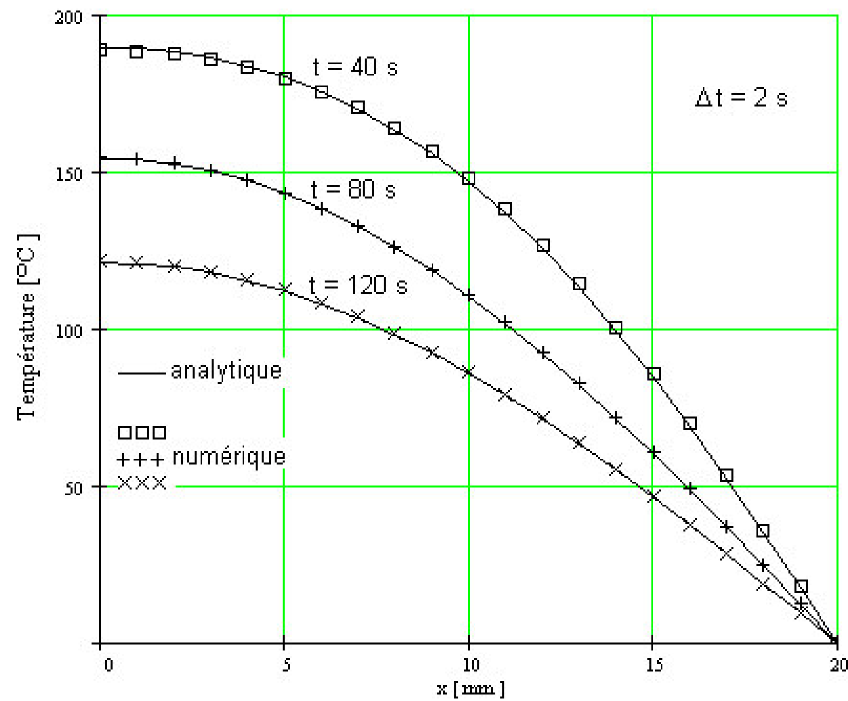


Fig. 4.19 *Comparaison des résultats numériques (maillage de 21 noeuds) et analytiques au différents instants de temps (méthode implicite).*

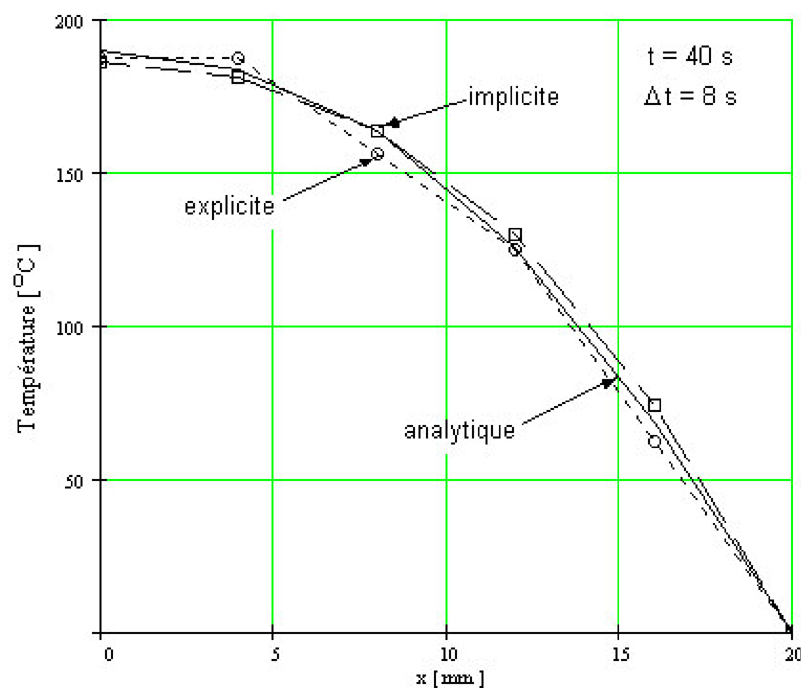


Fig. 4.20 *Comparaison des solutions, en utilisant les méthodes explicite et implicite*

4.3 Conduction thermique stationnaire en deux dimensions (2D)

4.3.1 Forme générale de l'équation discrétisée

La méthodologie utilisée pour la discrétisation de l'équation dans le cas unidimensionnel peut être utilisée facilement dans le cas bidimensionnel (2D). Pour illustrer cette technique on considère l'équation de la conduction thermique 2D stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)+S=0\,. \tag{4.106}$$

Le type de maillage utilisé, dans ce cas, est représentée à la figure 4.21

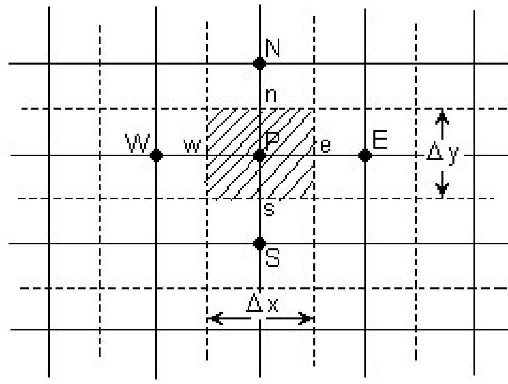


Fig. 4.21 *Maillage 2D.*

De plus, par rapport au maillage 1D, aux noeuds voisins, "East" (E) et "West" (W) du point P on ajoute les voisins "North" (N) et "South" (S).

L'intégration de l'équation (4.106), sur le volume de contrôle, donne :

$$\int_{VC}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\ dy+\int_{VC}\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)dx\ dy+\int_{VC} SdV = 0\,. \tag{4.107}$$

Si l'on note $A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$, on obtient :

$$\left[\lambda_e A_e\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e-\lambda_w A_w\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]+\left[\lambda_n A_n\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n-\lambda_s A_s\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right]+\bar{S}\Delta V = 0\,. \tag{4.108}$$

L'équation (4.108) représente le bilan entre la génération de T dans le volume de contrôle et les flux aux faces du volume de contrôle. En utilisant la même approximation que dans le cas 1D, c'est-à-dire on suppose une variation linéaire du gradient de température entre deux points voisins du maillage, on peut écrire les flux aux faces du volume de contrôle :

$$\text{Le flux au face "w"} = \lambda_w A_w \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_w = \lambda_w A_w \frac{T_E - T_W}{\delta x_{WP}} \tag{4.109}$$

$$\text{Le flux au face "e"} = \lambda_e A_e \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} \quad ; \tag{4.110}$$

$$\text{Le flux au face "s"} = \lambda_s A_s \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_s = \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} \quad ; \tag{4.111}$$

$$\text{Le flux au face "n"} = \lambda_n A_n \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_n = \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} . \tag{4.112}$$

En remplaçant les relations des flux ci-dessus dans l'équation (4.108), on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_{SP}} + \bar{S}\Delta V = 0 . \tag{4.113}$$

Si l'on tient compte que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y$ et $\bar{S} = S_c + S_P T_P$ et finalement en regroupant les termes, l'équation (4.113) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}} - S_P \Delta x \Delta y\right) T_P \\ &= \left(\frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}}\right) T_W + \left(\frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}}\right) T_E + \left(\frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}}\right) T_S + \left(\frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}}\right) T_N + S_c \Delta x \Delta y \end{aligned} \tag{4.114}$$

L'équation (4.114) peut être écrite donc sous la forme générale discrétisée pour un noeud intérieur :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b , \tag{4.115}$$

où $a_W = \dfrac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \quad a_E = \dfrac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \quad a_S = \dfrac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} \quad a_N = \dfrac{\lambda_n A_n}{\delta y_{PN}}$;

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n - S_P \Delta x \Delta y \qquad b = S_c \Delta x \Delta y .$$

Pour obtenir la distribution de la température T (ou pour une autre variable dépendante Φ) dans une situation 2D on écrit l'équation discrétisée pour chaque noeud du maillage. Aux frontières du domaine d'analyse où la température ou le flux sont connus l'équation discrétisée est modifiée pour prendre en compte les conditions aux limites dans la manière présentée aux exemples ci-dessous.

4.3.2 Exemples

Exemple 1

On considère une plaque rectangulaire ($0.5 \text{ x } 0.4 \text{ m}$) d'épaisseur 0.01 m (fig. 4.22). La conductivité thermique du matériau de la plaque est $\lambda = 1000 \text{ W/mK}$. La frontière “West” de la plaque reçoit un flux constant $q = 500 \text{ kW/m}^2$ et les frontières “South” et “East” sont isolées. La frontière “North” est maintenue à la température de $100\,°\text{C}$.

Calculer la distribution stationnaire de la température dans les noeuds 1, 2, 3, …etc., en utilisant le maillage présenté à la figure 4.22 ($\Delta x = \Delta y = 0.1 \text{ m}$).

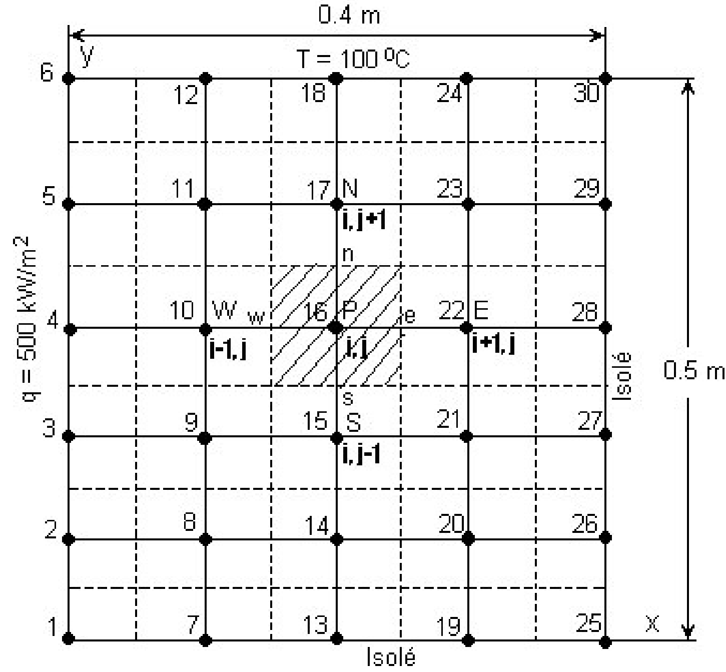


Fig. 4.22 Maillage et conditions aux limites pour le problème de conduction thermique 2D.

Solution

L'équation de conduction thermique stationnaire 2D pour les conditions énoncées est :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0. \tag{4.116}$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N , \tag{4.117}$$

où $\quad a_W = \dfrac{\lambda A_w}{\Delta x} \qquad a_E = \dfrac{\lambda A_e}{\Delta x} \qquad a_S = \dfrac{\lambda A_s}{\Delta y} \qquad a_N = \dfrac{\lambda A_n}{\Delta y}$;

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n .$$

Les valeurs des coefficients, des points voisins avec le point P, dans les conditions d'un maillage uniforme, sont :

$$a_W = a_E = a_N = a_S = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10 \; ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n = 10 + 10 + 10 + 10 = 40 .$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds intérieurs (le noeud 8-11, 14-17, 20-23) sont :

$$
\begin{aligned}
40T_8 &= 10T_2 + 10T_{14} + 10T_7 + 10T_9 \\
40T_9 &= 10T_3 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10} \\
40T_{10} &= 10T_4 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11} \\
40T_{11} &= 10T_5 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10T_{12} \\
40T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10T_{13} + 10T_{15} \\
40T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} \\
40T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} \\
40T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10T_{18} \\
40T_{20} &= 10T_{14} + 10T_{26} + 10T_{19} + 10T_{21} \\
40T_{21} &= 10T_{15} + 10T_{27} + 10T_{20} + 10T_{22} \\
40T_{22} &= 10T_{16} + 10T_{28} + 10T_{21} + 10T_{23} \\
40T_{23} &= 10T_{17} + 10T_{29} + 10T_{22} + 10T_{24}
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

Pour les noeuds situés sur la frontière "West" (les noeuds 2, 3, 4 et 5) on obtient l'équation discrétisée en intégrant l'équation de conduction thermique (4.116) sur le demi-volume de contrôle présenté à la figure 4.23.

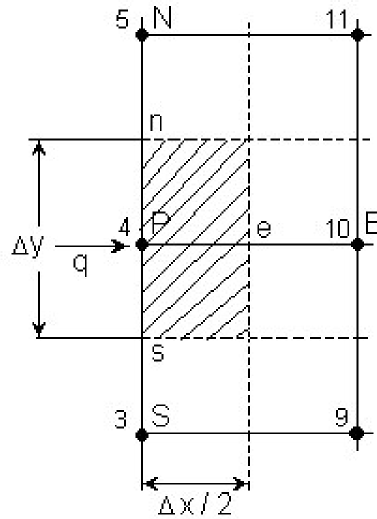


Fig. 4.23 *Demi-volume de contrôle sur la frontière "W".*

$$\int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\ dy + \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\ dy = 0. \tag{4.119}$$

L'intégration de l'équation (4.119) donne :

$$\left[\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P\right] + \left[\lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right] = 0\,, \qquad (4.120)$$

où $A_e = A_P = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x / 2$. En remplaçant les gradients de température dans les points e, P, n et s, on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + A_P q + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y} = 0\,,$$

où $q = -\lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P$ est le flux imposé sur la frontière “West”.

En regroupant les termes, on obtient l’équation discrétisée pour les noeuds intérieurs de la frontière “West” ainsi :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b\,, \qquad (4.121)$$

où $a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x}$ $\quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y}$ $\quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$ $\quad b = q A_P$;

$$a_P = a_E + a_S + a_N\,.$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10 \qquad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5\ ;$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \qquad b = q A_P = 500000 \cdot (0.1 \cdot 0.01) = 500\ ;$$

$$a_P = a_E + a_S + a_N = 10 + 5 + 5 = 20\,.$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds 2, 3, 4 et 5 sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 20T_2 &= 10T_8 + 5T_1 + 5T_3 + 500 \\ 20T_3 &= 10T_9 + 5T_2 + 5T_4 + 500 \\ 20T_4 &= 10T_{10} + 5T_3 + 5T_5 + 500 \\ 20T_5 &= 10T_{11} + 5T_4 + 5T_6 + 500 \end{aligned} \qquad (4.122)$$

Pour les noeuds situés sur la frontière “East” (les noeuds 26, 27, 28 et 29) on obtient l’équation discrétisée en intégrant l’équation de conduction thermique (4.116) sur le demi-volume de contrôle présenté à la figure 4.24.

$$\int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\ dy + \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\ dy = 0\ ; \tag{4.123}$$

$$\left[\lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right] + \left[\lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right] = 0. \tag{4.124}$$

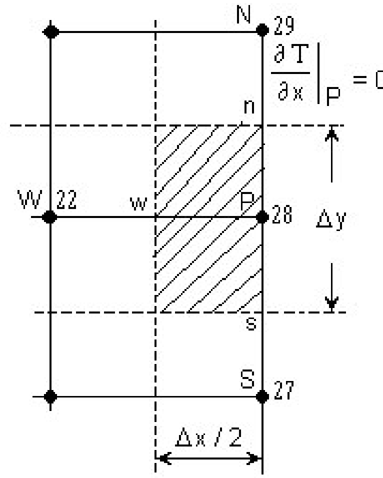


Fig. 4.24 *Demi-volume de contrôle sur la frontière "E".*

où $A_w = \Delta y \cdot 1$ et $A_n = A_s = \Delta x / 2 \cdot 1$. En tenant compte que $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = 0$ et en supposant une variation linéaire du gradient de température, on obtient :

$$-\lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\Delta y} = 0. \tag{4.125}$$

En regroupant les termes de l'équation (4.125) on obtient l'équation discrétisée pour un noeud intérieur sur la frontière "East" :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N, \tag{4.126}$$

où $a_W = \dfrac{\lambda_w A_w}{\Delta x} \quad a_S = \dfrac{\lambda_s A_s}{\Delta y} \quad a_N = \dfrac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$;

$a_P = a_W + a_S + a_N$.

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10 \qquad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \;;$$

$$a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \qquad a_P = a_W + a_S + a_N = 10 + 5 + 5 = 20.$$

Finalement, les équations discrétisées pour les noeuds 26, 27, 28, et 29 sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 20T_{26} &= 10T_{20} + 5T_{25} + 5T_{27} \\ 20T_{27} &= 10T_{21} + 5T_{26} + 5T_{28} \\ 20T_{28} &= 10T_{22} + 5T_{27} + 5T_{29} \\ 20T_{29} &= 10T_{23} + 5T_{28} + 5T_{30} \end{aligned} \tag{4.127}$$

Pour les noeuds situés sur la frontière “South” (les noeuds 7, 13, et 19) on obtient l’équation discrétisée en intégrant l’équation de conduction thermique (4.116) sur le demi-volume de contrôle présenté à la figure 4.25.

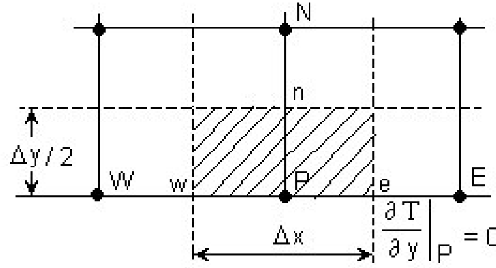


Fig. 4.25 *Demi-volume de contrôle sur la frontière “South”.*

L’intégration de l’équation (4.116) sur le demi-volume de contrôle hachuré de la figure 4.25 donne :

$$\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w + \lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P = 0, \tag{4.128}$$

où $A_w = A_e = \Delta y / 2 \cdot 1$ et $A_n = \Delta x \cdot 1$. En rapprochant les gradients de température par une variation linéaire et en tenant compte de la condition à la limite $(\partial T / \partial y)_P = 0$ on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0 \tag{4.129}$$

En regroupant les termes dans l’équation (4.129) on obtient finalement la forme générale de l’équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N \,, \tag{4.130}$$

où $\quad a_W = \dfrac{\lambda_w A_w}{\Delta x} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e A_e}{\Delta x} \qquad a_N = \dfrac{\lambda_n A_n}{\Delta y} \quad ;$

$$a_P = a_W + a_E + a_N \,.$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_W = \frac{1000 \cdot \left(\dfrac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \qquad a_E = \frac{1000 \cdot \left(\dfrac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \;;$$

$$a_N = \frac{1000 \cdot (0.1 \cdot 0.01)}{0.1} = 10 \qquad a_P = 5 + 5 + 10 = 20 \;;$$

Les équations discrétisée pour les noeuds 7, 13 et 19 sont :

$$\begin{aligned} 20T_7 &= 5T_1 + 5T_{13} + 10T_8 \\ 20T_{13} &= 5T_7 + 5T_{19} + 10T_{14} \\ 20T_{19} &= 5T_{13} + 5T_{25} + 10T_{20} \end{aligned} \tag{4.131}$$

Les noeuds 1 et 25 sont traités aussi de façon particulière. Ainsi, pour le noeud 1 on intègre l'équation (4.116) sur le volume de contrôle hachuré présenté à la figure 4.26.

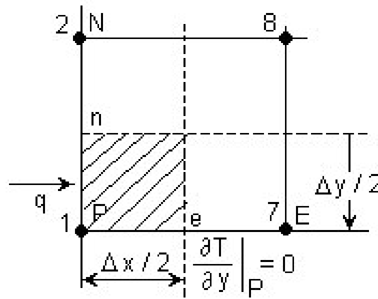


Fig. 4.26 *Quart de volume de contrôle (le coin W-S).*

$$\int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dy + \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\, dy = 0 \,, \tag{4.132}$$

$$\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P + \lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P = 0 \,, \tag{4.133}$$

où $A_e = A_P = (\Delta y / 2) \cdot 1$ et $A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1$. En tenant compte que $q = -\lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_P$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_P = 0$, on obtient :

$$\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + A_P q + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0. \qquad (4.134)$$

En regroupant les termes, on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud de coin 1 :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + b, \qquad (4.135)$$

où $a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x}$ $\quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$ $\quad a_P = a_E + a_N$ $\quad b = A_P q$.

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01 \right)}{0.1} = 5 \qquad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01 \right)}{0.1} = 5 \; ;$$

$$a_P = a_E + a_N = 5 + 5 = 10 \qquad b = A_P q = \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01 \right) \cdot 500 \cdot 10^3 = 250.$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$10T_1 = 5T_7 + 5T_2 + 250. \qquad (4.136)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 25 (noeud de coin "E – S") on intègre l'équation (4.116) sur le quart de volume de contrôle hachuré à la figure 4.27.

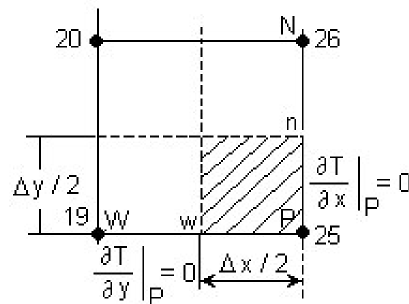


Fig. 4.27 *Quart de volume de contrôle (le coin E-S).*

$$\int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx\, dy + \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx\, dy = 0. \qquad (137)$$

Après l'intégration on a :

$$\lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w + \lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_P A_P \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P = 0, \qquad (4.138)$$

où $A_w = (\Delta y / 2) \cdot 1$ et $A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1$. En tenant compte que $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = 0$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P = 0$, on obtient :

$$-\lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\Delta y} = 0. \qquad (4.139)$$

Finalement on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 25 (noeud de coin) :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_N T_N, \qquad (4.140)$$

où $a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x}$ $\quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y}$ $\quad a_P = a_W + a_N$.

Les valeurs numériques des coefficients sont les suivantes :

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\Delta x} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \qquad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\Delta y} = \frac{1000 \cdot \left(\frac{0.1}{2} \cdot 0.01\right)}{0.1} = 5 \;;$$

$$a_P = a_W + a_N = 5 + 5 = 10 \;.$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$10T_{25} = 5T_{19} + 5T_{26} \qquad (4.141)$$

Finalement, le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$10T_1 = 5T_7 + 5T_2 + 250$$
$$20T_2 = 10T_8 + 5T_1 + 5T_3 + 500$$
$$20T_3 = 10T_9 + 5T_2 + 5T_4 + 500$$
$$20T_4 = 10T_{10} + 5T_3 + 5T_5 + 500$$
$$20T_5 = 10T_{11} + 5T_4 + 5T_6 + 500$$
$$20T_7 = 5T_1 + 5T_{13} + 10T_8$$
$$40T_8 = 10T_2 + 10T_{14} + 10T_7 + 10T_9$$
$$40T_9 = 10T_3 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10}$$
$$40T_{10} = 10T_4 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11}$$

$$
\begin{aligned}
40T_{11} &= 10T_5 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10T_{12} \\
20T_{13} &= 5T_7 + 5T_{19} + 10T_{14} \\
40T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10T_{13} + 10T_{15} \\
40T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} \\
40T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} \\
40T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10T_{18} \\
20T_{19} &= 5T_{13} + 5T_{25} + 10T_{20} \\
40T_{20} &= 10T_{14} + 10T_{26} + 10T_{19} + 10T_{21} \\
40T_{21} &= 10T_{15} + 10T_{27} + 10T_{20} + 10T_{22} \\
40T_{22} &= 10T_{16} + 10T_{28} + 10T_{21} + 10T_{23} \\
40T_{23} &= 10T_{17} + 10T_{29} + 10T_{22} + 10T_{24} \\
10T_{25} &= 5T_{19} + 5T_{26} \\
20T_{26} &= 10T_{20} + 5T_{25} + 5T_{27} \\
20T_{27} &= 10T_{21} + 5T_{26} + 5T_{28} \\
20T_{28} &= 10T_{22} + 5T_{27} + 5T_{29} \\
20T_{29} &= 10T_{23} + 5T_{28} + 5T_{30}
\end{aligned}
\tag{4.142}
$$

La solution numérique du système (4.142) est présentée dans le tableau 4.8. On constate une bonne correspondance, pour presque le même numéro de noeuds, entre les résultats obtenus avec la méthode des volumes finis et celles obtenus avec la méthode des élements finis en utilisant le logiciel QuickField ***(Student's QuickField^{TM} 3.40a, Copyright ©1993-97 Tera Analysis)***. Pour apprécier la précision, il faut comparer les résultats numériques avec la solution analytique. À la figure 4.28 sont présentées les courbes isothermes obtenues à l'aide du logiciel QuickField.

Tableau 4.8 *La solution numérique du système (4.142) (la méthode des volumes finis – MVF, 30 noeuds et 546 noeuds, et la méthode des élements finis – MEF, 31 noeuds et 485 noeuds)*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{13}	T_{14}	T_{15}
319.8	312.9	291.8	254.7	196.3	276.7	270.0	249.8	215.3	165.3	246.9	240.7	222.1
320.6	311.9	289.4	250.8	190.3	277.3	270.2	249.9	216.0	167.4	246.8	240.6	221.6
321.2	314.5	293.7	257.6	201.5	278.0	271.4	251.3	216.9	166.5	247.9	241.6	223.0
321.2	314.5	293.8	257.6	201.6	278.0	271.4	251.2	216.8	166.5	247.9	241.6	223.0

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
T_{16}	T_{17}	T_{19}	T_{20}	T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{25}	T_{26}	T_{27}	T_{28}	T_{29}	**Noeud**
191.4	149.7	229.5	223.7	206.4	178.6	141.9	223.8	218.2	201.4	174.6	139.6	**M V F 30 noeuds**
191.3	148.7	228.9	222.8	205.3	177.4	141.7	223.4	217.6	200.7	173.9	139.2	**M E F 31 noeuds**
192.0	149.9	230.3	224.4	206.9	178.9	142.0	224.5	218.7	201.8	174.7	139.6	**M V F 546 noeuds**
192.1	149.9	230.2	224.4	206.9	178.8	142.0	224.4	218.7	201.8	174.7	139.6	**M E F 485 noeuds**

En analysant les résultats du tableau 4.8 on constate une très bonne correspondance entre les résultats obtenus avec la méthode des volumes finis (546 noeuds) et celles obtenus avec la méthode des éléments finis (485 noeuds). Comme la matrice des coefficients du système d'équations algébriques est une matrice de type bande, on peut utiliser l'algorithme de Thomas adapté au cas bidimensionnel (voir le code source à l'Annexe G – THER2Ds1).

4.3.3 Application de l'algorithme de Thomas aux problèmes 2D (ou ligne par ligne)

L'algorithme de Thomas peut être appliqué itérativement pour résoudre le système d'équations algébriques dans le cas des problèmes 2D. On combine la méthode directe de l'algorithme de Thomas dans une direction et la méthode itérative de Gauss-Seidel dans l'autre direction. Soit l'exemple du maillage de la figure 4.29

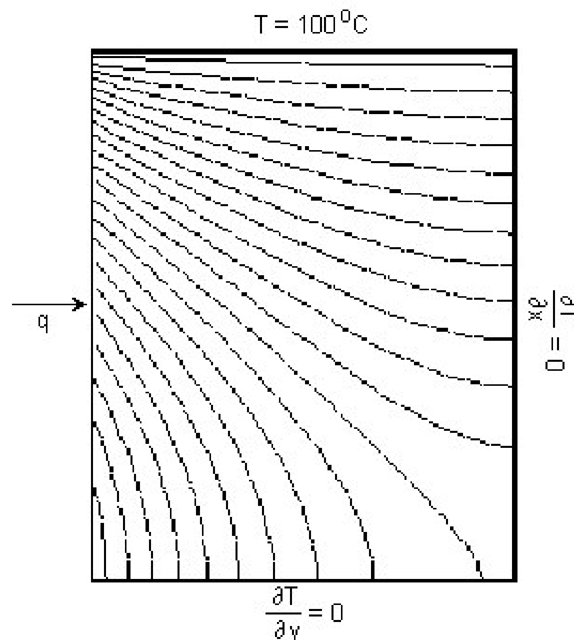


Fig. 4.28 *Les isothermes.*

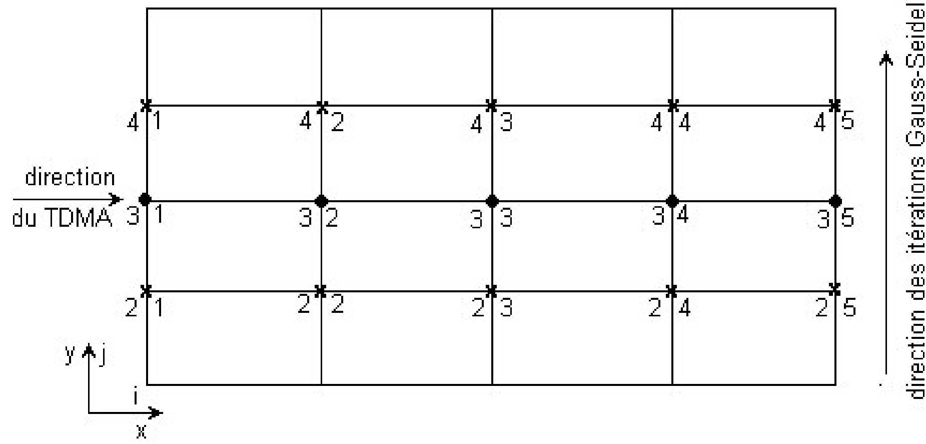


Fig. 4.29 *Application du TDMA dans le cas 2D.*

Les équations discrétisées sur la ligne $j=3$, par exemple, sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
a_{32}T_{32} &= a_{31}T_{31} + a_{33}T_{33} + a_{22}T_{22}^{*} + a_{42}T_{42}^{*} + b_{32} \\
a_{33}T_{33} &= a_{32}T_{32} + a_{34}T_{34} + a_{23}T_{23}^{*} + a_{43}T_{43}^{*} + b_{33} \\
a_{34}T_{34} &= a_{33}T_{33} + a_{35}T_{35} + a_{24}T_{24}^{*} + a_{44}T_{44}^{*} + b_{34}.
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Si $1 \le j \le m$, on résout m problèmes 1D dans la direction "x" par le TDMA, en balayant tous les indices $j \in [1, m]$. Les températures T_{ij}^{*} sont les dernières valeurs de la température calculées (l'itération précedente) sur les lignes voisines de la ligne où l'on effectue le TDMA.

Remarques

♦ La convergence de la méthode ligne par ligne est plus rapide que celle de Gauss-Seidel car l'information contenue sur les frontières de la ligne où s'applique le TDMA est transmise instantanément à l'intérieur du domaine et cela quel que soit le nombre de noeuds sur la ligne.

♦ La vitesse de transmission dans l'autre direction est la même que pour la méthode de Gauss-Seidel.

♦ En alternant les directions d'application du TDMA, on peut accélérer la propagation de l'information contenue sur toutes les frontières vers l'intérieur du domaine.

♦ La géométrie et le maillage peuvent donner des coefficients a_{vs} beaucoup plus grands dans une direction que dans l'autre. À ce moment-là, il faut prendre pour direction du TDMA la

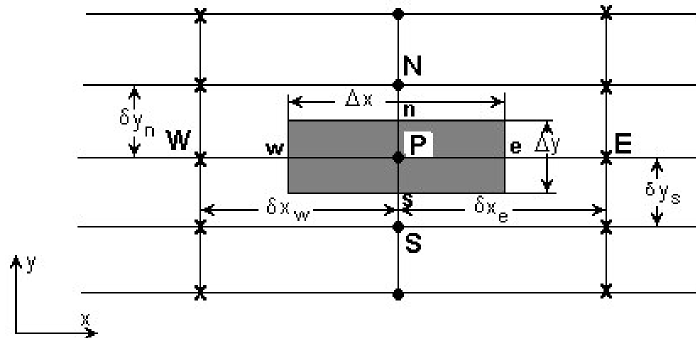


Fig. 4.30 *Choix de la direction du TDMA.*

direction des grands coefficients car cela accélère la convergence. Soit l'exemple suivant de la figure 4.30. Les coefficients de l'équation discrétisée sont les suivants :

$$a_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{\delta x_w} \qquad a_E = \frac{\lambda_e \Delta y}{\delta x_e} \qquad a_S = \frac{\lambda_s \Delta x}{\delta y_s} \qquad a_N = \frac{\lambda_n \Delta x}{\delta y_n},$$

où $\delta x_{w(e)} >> \delta y_{s(n)} \qquad \Delta x >> \Delta y$.

Ceci implique que $a_{S(N)} >> a_{W(E)}$ et donc on prend pour direction du TDMA la direction " y ". L'équation discrétisée est la suivante :

$$a_P T_P = a_S T_S + a_N T_N + a_W T_W^* + a_E T_E^* + b . \tag{4.144}$$

♦ Dans certains cas, la direction de balayage pour les itérations de la méthode de Gauss-Seidel est imposée par les conditions aux limites ou par la direction de l'écoulement (de l'amont vers l'aval).

Exemple 2

On considère une plaque métallique rectangulaire ($0.05 \text{ x } 0.04 \text{ m}$). La conductivité thermique du matériau de la plaque est $\lambda = 4$ W/m/K . Toutes les frontières de la plaque sont maintenues à la température de $0\,°\text{C}$ et le terme source est $S = 40 \cdot 10^6$ W/m^3 .

Calculer la distribution stationnaire de la température dans la plaque en utilisant le maillage de la figure 4.31 ($\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$).

Solution

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + S = 0 . \tag{4.145}$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \tag{4.146}$$

où $a_W = \dfrac{\lambda A_w}{\Delta x} \qquad a_E = \dfrac{\lambda A_e}{\Delta x} \qquad a_S = \dfrac{\lambda A_s}{\Delta y} \qquad a_N = \dfrac{\lambda A_n}{\Delta y}$,

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n \qquad b = \overline{S}\Delta x \Delta y .$$

Le terme source, $\overline{S}$ étant constant, ce n'est pas nécessaire d'être linéarisé. Les valeurs des coefficients voisins, pour le maillage choisi, sont :

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{4 \cdot 0.01 \cdot 1}{0.01} = 4 \;;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 \;;$$

$b = \overline{S}\Delta x \Delta y = 40 \cdot 10^6 \cdot 0.01 \cdot 0.01 = 4000$.

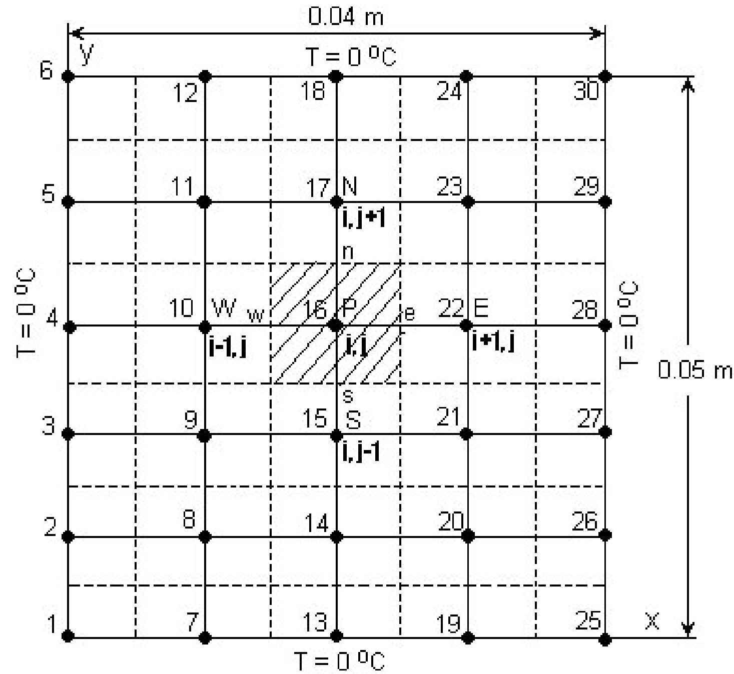


Fig. 4.31 *Maillage et conditions aux limites pour l'exemple 2*

Pour les noeuds de frontière (noeuds $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$) la température étant connue ce n'est pas nécessaire d'écrire les équations discrétisées. Alors le nombre d'équations à résoudre est égal à 12, les équations discrétisées sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
4T_8 &= T_{14} + T_9 + 1000 \\
4T_9 &= T_{15} + T_8 + T_{10} + 1000 \\
4T_{10} &= T_{16} + T_9 + T_{11} + 1000 \\
4T_{11} &= T_{17} + T_{10} + 1000 \\
4T_{14} &= T_8 + T_{20} + T_{15} + 1000 \\
4T_{15} &= T_9 + T_{21} + T_{14} + T_{16} + 1000 \\
4T_{16} &= T_{10} + T_{22} + T_{15} + T_{17} + 1000 \\
4T_{17} &= T_{11} + T_{23} + T_{16} + 1000 \\
4T_{20} &= T_{14} + T_{21} + 1000 \\
4T_{21} &= T_{15} + T_{20} + T_{22} + 1000 \\
4T_{22} &= T_{16} + T_{21} + T_{23} + 1000 \\
4T_{23} &= T_{17} + T_{22} + 1000
\end{aligned}
\tag{4.147}
$$

En regroupant les inconnues, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix} \tag{4.148}$$

La solution du système (4.148) est :

$$\begin{bmatrix} T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 746.479 \\ 1028.000 \\ 1028.000 \\ 746.479 \\ 957.746 \\ 1338.000 \\ 1338.000 \\ 957.746 \\ 746.479 \\ 1028.000 \\ 1028.000 \\ 746.479 \end{bmatrix} \tag{4.149}$$

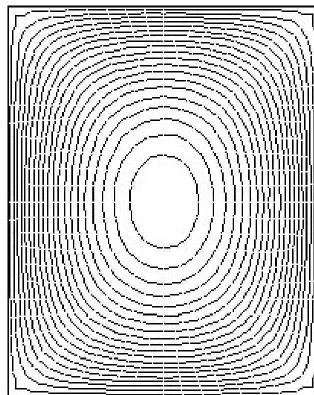


Fig. 4.32 *Les courbes isothermes (obtenues à l'aide du logiciel QuickField)*

La solution analytique du problème pour un quart du domaine d'analyse (fig. 4.34) est la suivante, [28] :

$$T(x, y) = \frac{S(a^2 - x^2)}{2\lambda} - \frac{16Sa^2}{\pi^3\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left((2n+1)\frac{\pi x}{2a}\right)\cosh\left((2n+1)\frac{\pi y}{2a}\right)}{(2n+1)^3 \cosh\left((2n+1)\frac{\pi b}{2a}\right)} \tag{4.150}$$

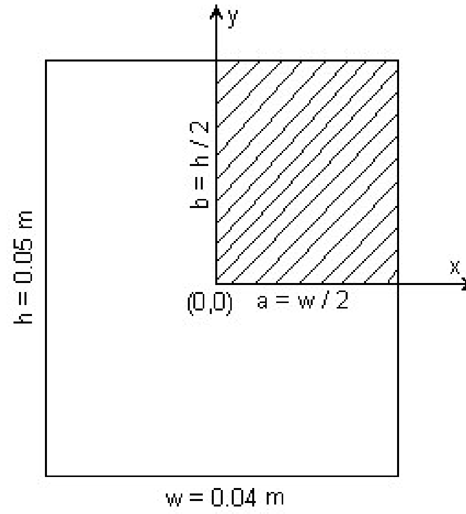


Fig. 4.34 *Le domaine de calcul analytique*

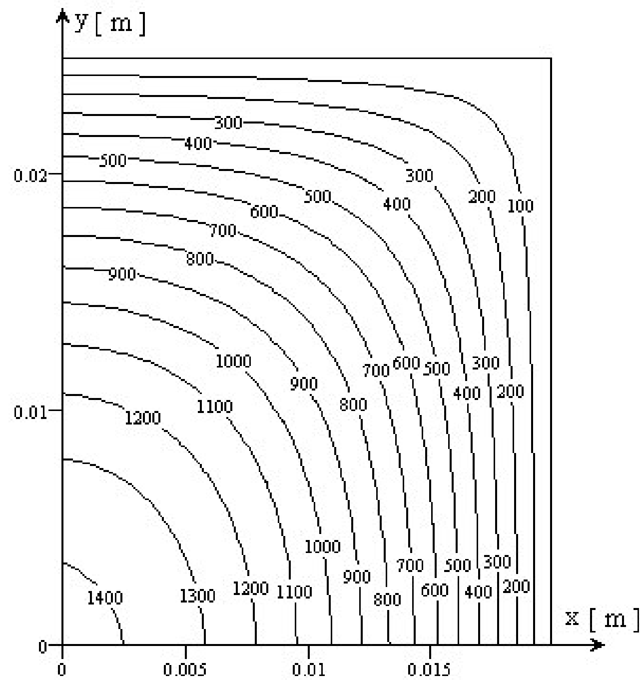


Fig. 4.34a *Les courbes isothermes (solution analytique)*

À la figure 4.34-a on présente la solution analytique obtenue à l'aide de l'expression (4.150) pour le domaine de calcul hachuré de la figure 4.34. À la figure 4.34-b on présente la solution numérique. On constate une très bonne correspondance entre la solution numérique et la solution analytique (mais il faut tenir compte que même la solution analytique est le résultat d'un calcul numérique d'évaluation d'une série tronquée). Dans le tableau ci-dessous on présente une comparaison des résultats obtenus en utilisant la méthode des volumes finis (le programme THERM2D2), la solution analytique et à l'aide du logiciel QuickField.

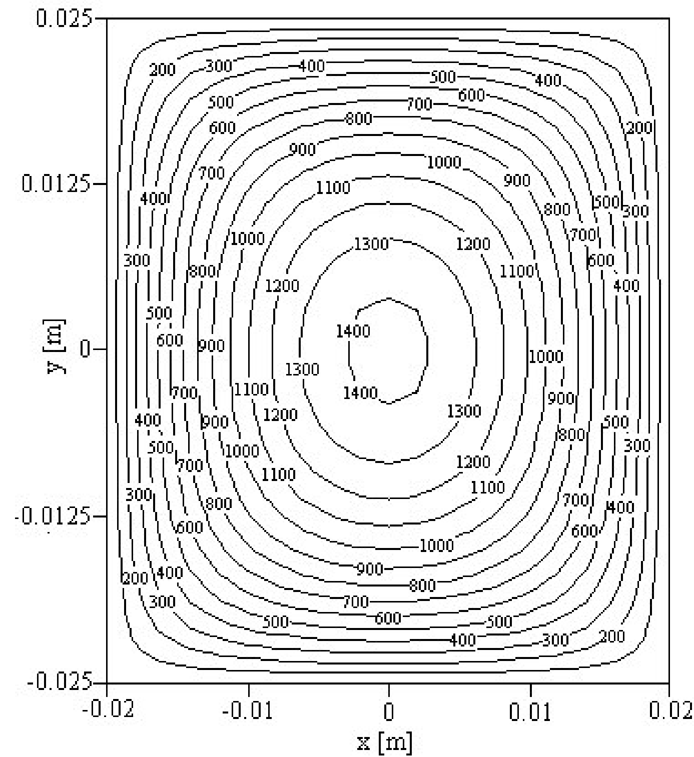


***Fig.4.34b** Les courbes isothermes (solution numérique)*

x = 0 $y[mm]$	$T[K]$ **QuickField**	$T[K]$ **Analytique**	$T[K]$ **numérique MVF**	Erreur [%]
1	1429.10	1430.000	1428.26	0.12
3	1413.70	1416.000	1414.27	0.12
5	1386.80	1388.000	1385.97	0.14
7	1341.60	1345.000	1342.71	0.17
9	1281.60	1286.000	1283.49	0.19
11	1206.50	1209.000	1206.97	0.16
13	1113.30	1113.000	1111.47	0.14
15	996.47	996.558	994.92	0.16
17	852.53	856.310	854.90	0.16
19	683.60	689.757	688.63	0.16
21	486.86	493.798	493.01	0.16
23	259.76	265.067	264.66	0.15
	485 noeuds		**546 noeuds**	

4.4 Conduction thermique instationnaire en deux dimensions (2D)

4.4.1 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation de conduction thermique instationnaire pour un problème 2D est la suivante

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + S. \tag{4.151}$$

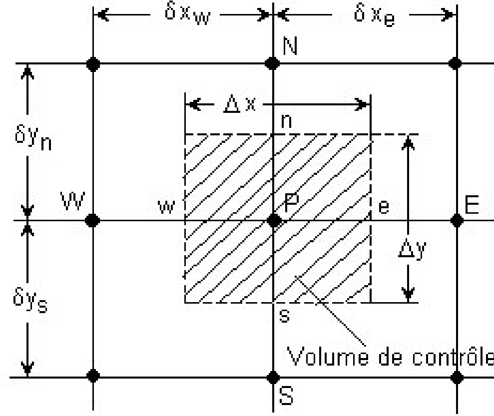


Fig. 4.35 *Volume de contrôle en deux dimensions.*

L'intégration de l'équation (4.151) sur le volume de contrôle schématisé à la figure 4.35 donne :

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx\,dy\,dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\,dy\,dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dy\,dx\,dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} S dx dy dt \tag{4.152}$$

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right)\Delta y\,dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right)\Delta x\,dt +$$
$$\int_t^{t+\Delta t} \overline{S} \Delta x \Delta y\,dt$$

En remplaçant les gradients de température on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\Delta x \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right) - \lambda_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right)\right)\Delta y\,dt +$$
$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta y_n}\right) - \lambda_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta y_s}\right)\right)\Delta x\,dt + \tag{4.153}$$
$$\int_t^{t+\Delta t} \overline{S} \Delta x \Delta y\,dt$$

En utilisant le schéma totalement implicite, on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = \lambda_e \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x_e}\right)\Delta y - \lambda_w \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x_w}\right)\Delta y + \lambda_n \left(\frac{T_N - T_P}{\delta y_n}\right)\Delta x - \lambda_s \left(\frac{T_P - T_S}{\delta y_s}\right)\Delta x + \overline{S}\Delta x\, \Delta y \tag{4.154}$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.154) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \tag{4.155}$$

où $a_W = \dfrac{\lambda_w A_w}{\delta x_w}$ $\quad a_E = \dfrac{\lambda_e A_e}{\delta x_e}$ $\quad a_S = \dfrac{\lambda_s A_s}{\delta y_s}$ $\quad a_N = \dfrac{\lambda_n A_n}{\delta y_n}$;

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x\, \Delta y}{\Delta t} ;$$

$$b = \overline{S}\Delta x\, \Delta y + a_P^0 T_P^0 .$$

Tableau 4.9

A_w	A_e	A_s	A_n
$\Delta y \cdot 1$	$\Delta y \cdot 1$	$\Delta x \cdot 1$	$\Delta x \cdot 1$

Si l'on peut exprimer $\overline{S} = S_c + S_P T_P$ (linéarisation du terme source) alors les coefficients a_P et b, de l'équation discrétisée, sont les suivants :

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0 - S_P \Delta x\, \Delta y ;$$

$$b = S_c \Delta x\, \Delta y + a_P^0 T_P^0 .$$

Remarque

L'équation (4.155) est valable pour un noeud intérieur du domaine de calcul. Pour les noeuds situés sur la frontière (dans le cas des conditions aux limites de type flux imposé, de type convection ou de type Neumann) ou voisins avec la frontière (dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet) les équations discrétisées sont obtenues en tenant compte des conditions aux limites. Le traitement des différentes conditions aux limites est illustré dans les exemples qui suivent.

4.4.2 Exemples

Exemple 1

On considère une plaque métallique rectangulaire ($0.05 \text{ x } 0.04 \text{ m}$). La conductivité thermique du matériau de la plaque est $\lambda = 10 \text{ W/m/K}$. À l'instant $t = 0$ la frontière "North" de la plaque est mise en contact avec une paroi maintenue à la température constante $T_p = 1000 \text{ K}$. Les autres frontières de la plaque sont maintenues à la température de 300 K.

Le terme source est constant et distribué de façon uniforme. $S = 40 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$. À l'instant $t = 0$ la plaque se trouve à la température de 300 K.

Calculer la distribution transitoire de la température dans la plaque en utilisant le maillage présenté à la figure 4.31 ($\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$). On connaît $\rho c_p = 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$.

Solution

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + S \,. \tag{4.156}$$

L'équation discrétisée pour un noeud intérieur (le noeud 16 par exemple) est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \tag{4.157}$$

où $a_W = \dfrac{\lambda A_w}{\Delta x}$ $\quad a_E = \dfrac{\lambda A_e}{\Delta x}$ $\quad a_S = \dfrac{\lambda A_s}{\Delta y}$ $\quad a_N = \dfrac{\lambda A_n}{\Delta y}$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$b = \bar{S}\Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0$$

Le terme source $\bar{S}$ étant constant, il n'est pas nécessaire d'être linéarisé. Les valeurs des coefficients voisins, pour le maillage choisi ($\Delta x = \Delta y = 0.01$), sont :

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{10 \cdot 0.01 \cdot 1}{0.01} = 10 \;;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = 10^6 \frac{0.01 \cdot 0.01}{0.1} = 1000 \;;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_n + a_P^0 = 10 + 10 + 10 + 10 + 1000 = 1040 \;;$$

$$b = \bar{S}\Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0 = 40 \cdot 10^6 \cdot 0.01 \cdot 0.01 + 1000 \cdot T_P^0 = 4000 + 1000 \cdot T_P^0 .$$

Pour les noeuds situés sur la frontière (les noeuds 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30) la température étant connue, il n'est pas nécessaire d'écrire les

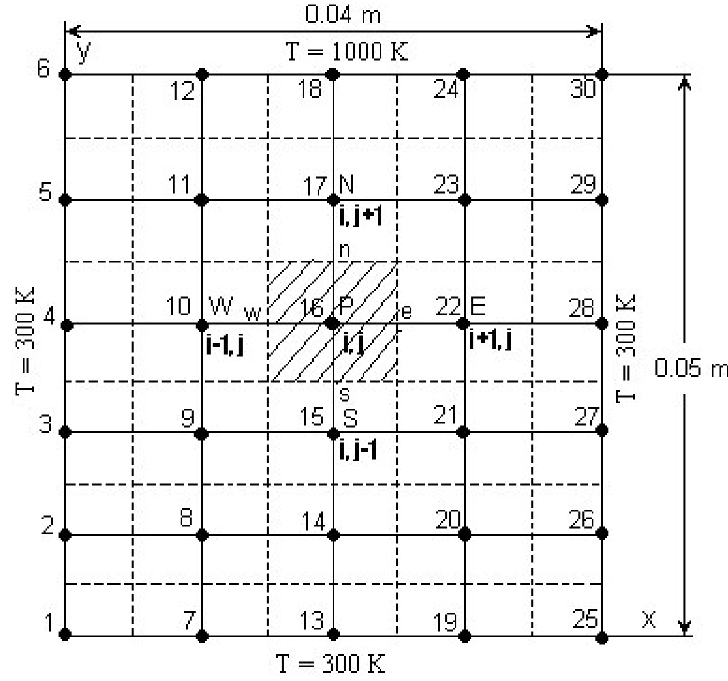


Fig. 4.36 *Maillage 2D pour l'exemple 1.*

équations discrétisées. Alors, le nombre d'équations à résoudre est égal à 12, les équations discrétisées sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
1040T_8 &= 10 \cdot 300 + 10T_{14} + 10 \cdot 300 + 10T_9 + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_9 &= 10 \cdot 300 + 10T_{15} + 10T_8 + 10T_{10} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{10} &= 10 \cdot 300 + 10T_{16} + 10T_9 + 10T_{11} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{11} &= 10 \cdot 300 + 10T_{17} + 10T_{10} + 10 \cdot 1000 + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{14} &= 10T_8 + 10T_{20} + 10 \cdot 300 + 10T_{15} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{15} &= 10T_9 + 10T_{21} + 10T_{14} + 10T_{16} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{16} &= 10T_{10} + 10T_{22} + 10T_{15} + 10T_{17} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{17} &= 10T_{11} + 10T_{23} + 10T_{16} + 10 \cdot 1000 + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{20} &= 10T_{14} + 10 \cdot 300 + 10 \cdot 300 + 10T_{21} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{21} &= 10T_{15} + 10 \cdot 300 + 10T_{20} + 10T_{22} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{22} &= 10T_{16} + 10 \cdot 3000 + 10T_{21} + 10T_{23} + 4000 + 1000T_P^0 \\
1040T_{23} &= 10T_{17} + 10 \cdot 300 + 10T_{22} 10 \cdot 1000 + 4000 + 1000T_P^0
\end{aligned}
\tag{4.158}
$$

En regroupant les inconnues, le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$
\begin{aligned}
&1040T_8 - 10T_9 - 10T_{14} = 10000 + 1000T_8^0 \\
&-10T_8 + 1040T_9 - 10T_{10} - 10T_{15} = 7000 + 1000T_9^0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&-10T_9 + 1040T_{10} - 10T_{11} - 10T_{16} = 7000 + 1000T_{10}^0 \\
&-10T_{10} + 1040T_{11} - 10T_{17} = 14000 + 1000T_{11}^0 \\
&-10T_8 + 1040T_{14} - 10T_{15} - 10T_{20} = 7000 + 1000T_{14}^0 \\
&-10T_9 - 10T_{14} + 1040T_{15} - 10T_{16} - 10T_{21} = 4000 + 1000T_{15}^0 \\
&-10T_{10} - 10T_{15} + 1040T_{16} - 10T_{17} - 10T_{22} = 4000 + 1000T_{16}^0 \\
&-10T_{11} - 10T_{16} + 1040T_{17} - 10T_{23} = 14000 + 1000T_{17}^0 \\
&-10T_{14} + 1040T_{20} - 10T_{21} = 10000 + 1000T_{20}^0 \\
&-10T_{15} - 10T_{20} + 1040T_{21} - 10T_{22} = 7000 + 1000T_{21}^0 \\
&-10T_{16} - 10T_{21} + 1040T_{22} - 10T_{23} = 7000 + 1000T_{22}^0 \\
&-10T_{17} + 1040T_{23} - 10T_{22} = 17000 + 1000T_{23}^0
\end{aligned} \tag{4.159}$$

Sous la forme matricielle le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix}
1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 1040 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-10 & 0 & 0 & 0 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & 0 & 0 & 0 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1040 & -10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 1040
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \\ T_{11} \\ T_{14} \\ T_{15} \\ T_{16} \\ T_{17} \\ T_{20} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
10000 + 1000T_8^0 \\
7000 + 1000T_9^0 \\
7000 + 1000T_{10}^0 \\
17000 + 1000T_{11}^0 \\
7000 + 1000T_{14}^0 \\
4000 + 1000T_{15}^0 \\
4000 + 1000T_{16}^0 \\
14000 + 1000T_{17}^0 \\
10000 + 1000T_{20}^0 \\
7000 + 1000T_{21}^0 \\
7000 + 1000T_{22}^0 \\
17000 + 1000T_{23}^0
\end{bmatrix} \tag{4.160}$$

Pour la résolution du système (4.160) on applique l'algorithme de Thomas, adapté aux problèmes 2D, présenté au paragraphe 4.3.3. Pour cela, l'équation discrétisée doit être mise sous la forme :

$$- a_S T_S + a_P T_P - a_N T_N = a_W T_W^* + a_E T_E^* + \overline{S} \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0 . \qquad (4.161)$$

Aux figures 4.37 et 4.39 sont présentées les solutions numériques obtenues à l'aide du programme **THERM2Di** (Annexe G), aux différents moments de temps, pour un pas de temps $\Delta t = 0.1\,\text{s}$.

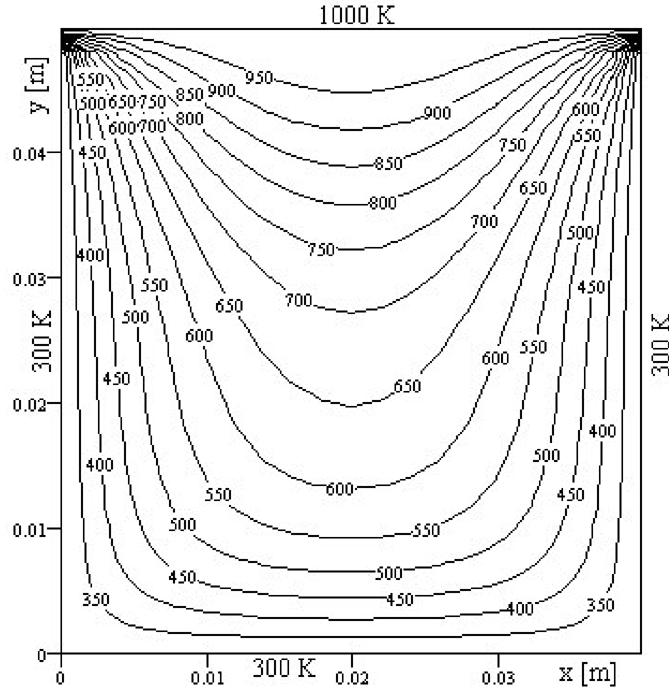


***Fig. 4.37** Distribution du champ thermique à l'instant $t = 10\,\text{s}$.*

À la figure 4.38 on présente une comparaison entre la solution numérique obtenue à l'aide du programme THERM2Di, en utilisant la méthode des volumes finis, et celles obtenue à l'aide du logiciel QuickField (**QuickField ™ 4.2T version 4.2.2.2, Copyright © 1993-2001 Tera Analysis**) en utilisant la méthode des éléments finis.

La comparaison est présentée le long de la droite $x = 20\,\text{mm}$. À cause du fait que la version du logiciel QuickField utilisée est limitée à 200 noeuds les erreurs sont assez grandes. Vers la frontière "North" où les gradients de température sont grands il faut utiliser un maillage très dense (fig. 4.40). On constate que, pour le maillage (fig. 4.41), les erreurs dans la zone de forts gradients sont très grandes, la distribution de la température ayant un comportement non réaliste. Au contraire si le maillage devient plus dense dans la zone des forts gradients, mais plus grossière dans le reste du domaine (fig. 4.40), les erreurs diminuent, mais augmente dans la zone $y = 0 \div 15\,\text{mm}$. On constate aussi que pour la méthode des volumes finis la solution est presque la même si l'on passe d'un maillage à 208 noeuds au maillage à 546 noeuds ce qui nous permet de tirer la conclusion que pour un même nombre de

noeuds et pour le même pas dans le temps la méthode des volumes finis semble être plus précise que la méthode des éléments finis dans le cas des problèmes de conduction thermique instationnaire. Cette analyse est plutôt qualitative parce qu'une analyse correcte doit être faite pour le même type de maillage, pour le même nombre de noeuds et pour le même schéma dans le temps.

En ce qui concerne le pas de discrétisation dans le temps, même si le schéma utilisé est totalement implicite, il faut noter que pour avoir une bonne précision de la solution, le pas dans le temps doit être très petit. Le schéma de discrétisation est du premier ordre comme précision dans le temps, tandis que dans l'espace est de second ordre.

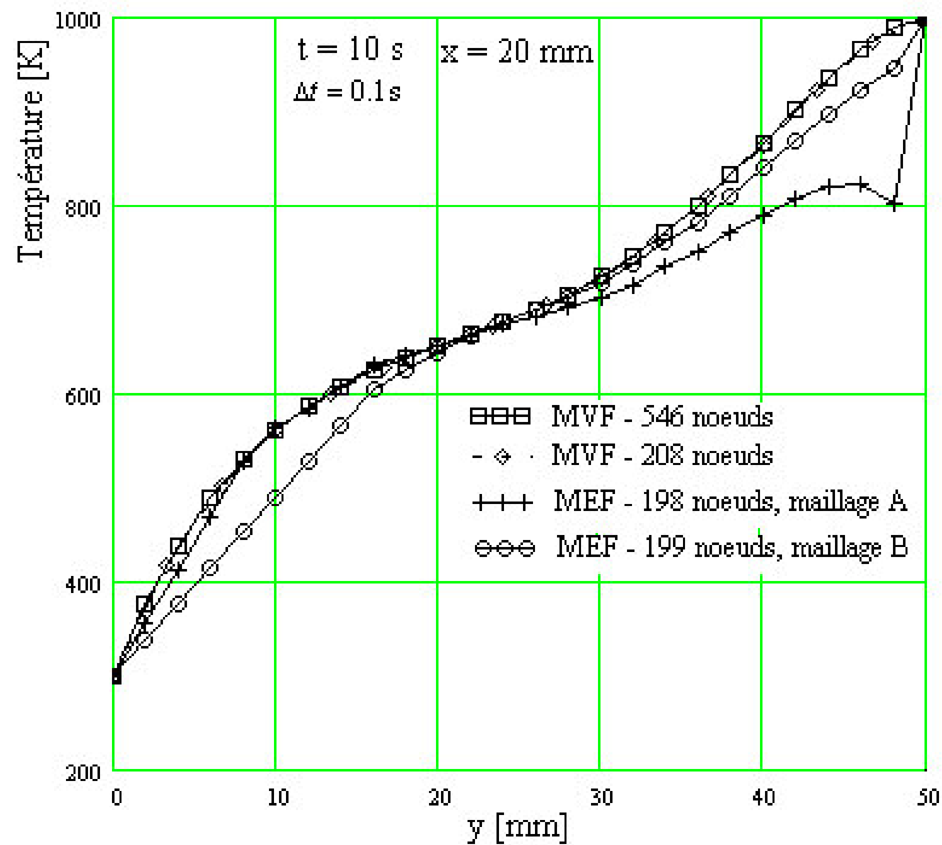


Fig. 4.38 *Comparaison des distributions spatiales de température (x = 20,y) à l'instant* $t = 10$ s*, obtenue à l'aide du programme THERM2Di et à l'aide du logiciel QuickField 4.2T (version Student).*

Dans le tableau ci-dessous on présente l'évolution de la distribution de la température pour différents pas de temps à l'instant $t = 10\,\text{s}$.

Tableau 4.10 L'évolution de la température pour différents pas de temps

Δt [s] / y [mm]	1	0.5	0.1	0.05	0.01
4	436.22	437.74	438.95	439.10	439.23
8	524.93	527.71	529.95	530.24	530.46
12	581.01	584.69	587.69	588.06	588.37
16	616.87	621.15	624.68	625.13	625.49
20	642.46	647.25	651.27	651,78	652.20
24	665.80	671.29	675.98	676.59	677.08
28	693.73	700.27	705.90	706.63	707.22
32	732.07	739.89	746.55	747.40	748.10
36	784.83	793.59	800.88	801.81	802.55
40	851.86	860.37	867.26	868.12	868.82
44	925.12	931.48	936.51	937.13	937.63
48	984.83	987.21	989.06	989.29	989.47

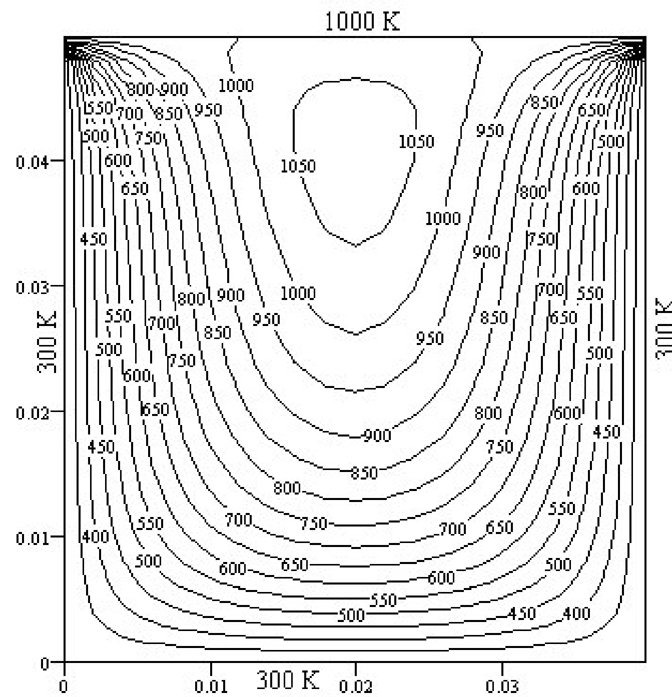


Fig. 4.39 Distribution du champ thermique à l'instant $t = 50\,\text{s}$.

D'après les résultats présentés au tableau 4.1 on constate qu'une bonne précision est obtenue pour un pas de temps $\Delta t \leq 0.1\,\text{s}$.

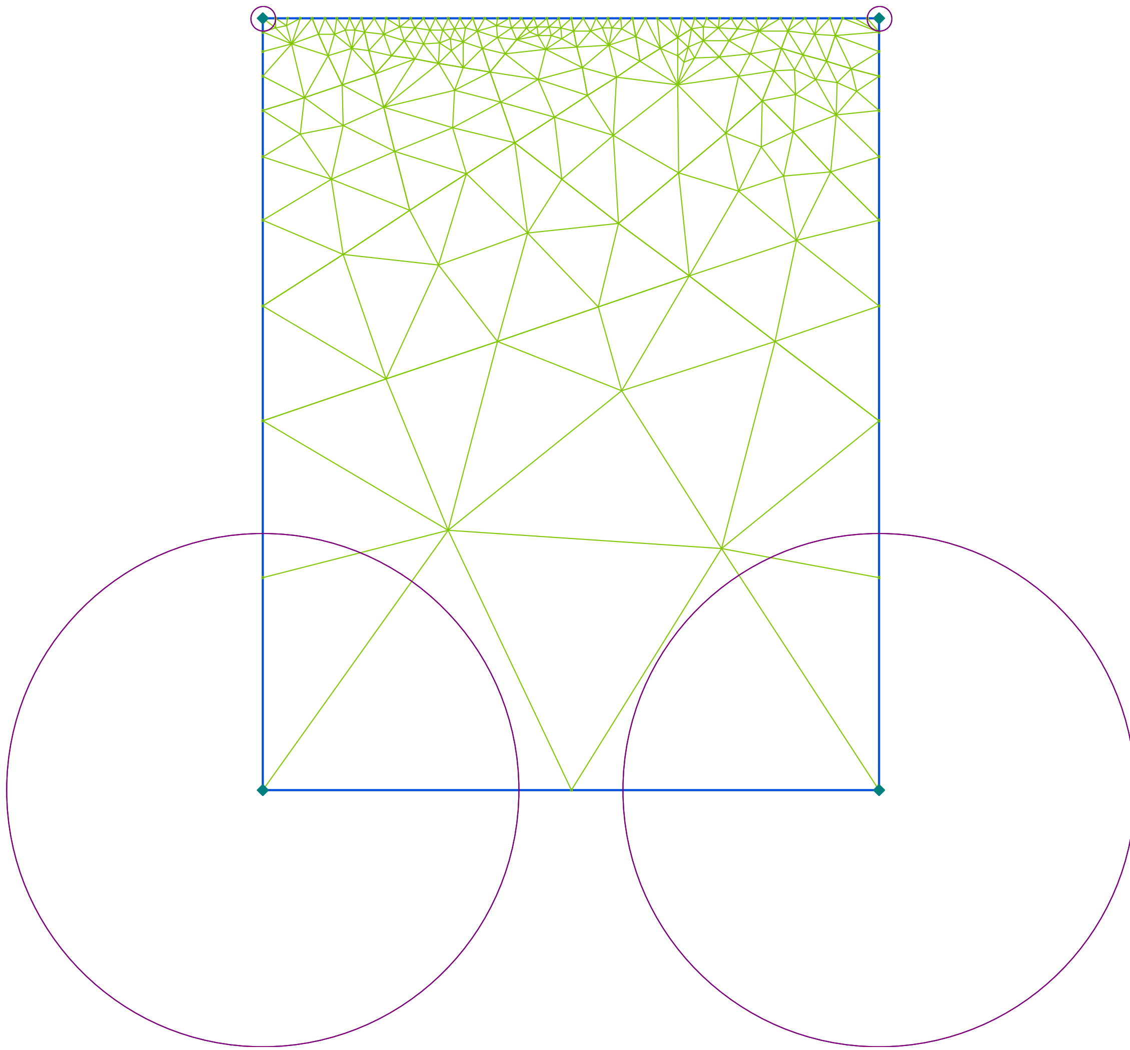


Fig.4.40 *Maillage A - obtenu à l'aide du logiciel QuickField 4.2T (version Student) (densité du maillage avec "spacing" 0.8/16.65 défini par les cercles).*

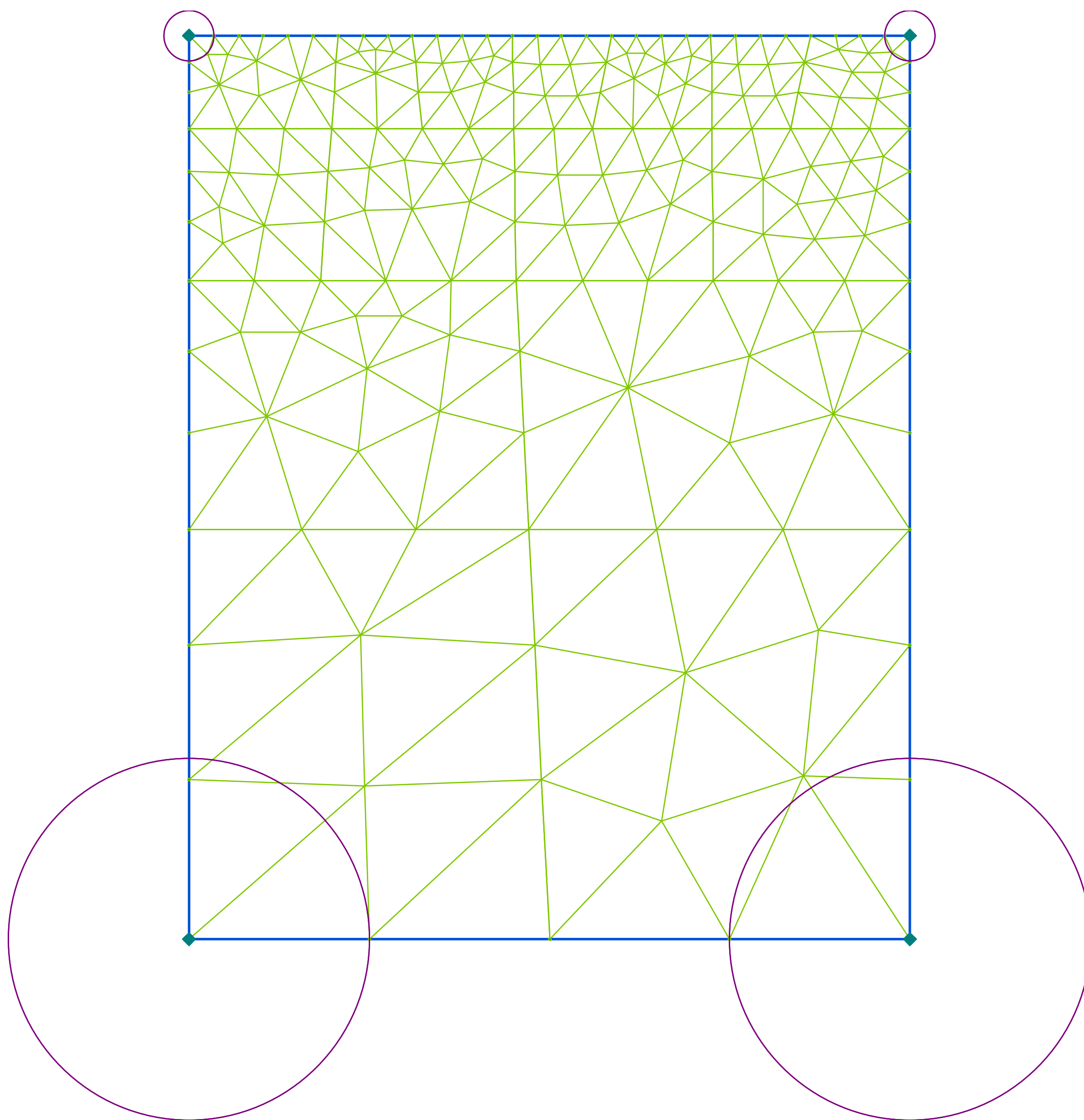


Fig. 4.41 *Maillage B – obtenu à l'aide du logiciel QuickField 4.2T (version Student) (densité du maillage avec "spacing" 1.38/10 défini par les cercles).*

Exemple 2

On considère une barre très longue ayant la section transversale rectangulaire $(0.08 \text{ x } 0.1) \text{ m}^2$. À l'instant $t = 0$ la section transversale, de la barre, a une distribution uniforme de la température, $T_0 = 425\ ^{o}C$. La barre est mise en contacte avec un fluide ayant la température uniforme $T_\infty = 25\ ^{o}C$. Le coefficient de transfert thermique par convection, sur la surface de séparation entre la barre et le fluide, est $h = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Déterminer l'évolution, dans le temps, de la distribution de la température sur la section transversale de la barre, en utilisant un pas de temps $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

On connaît les suivantes propriétés du matériau de la barre :

- la conductivité thermique, $\lambda = 35 \text{ W/mK}$;
- la densité de masse, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$;
- la chaleur spécifique, $c_p = 3500 \text{ J/kgK}$.

Solution

En profitant de la symétrie, on calcule la distribution de la température sur un quart de la section transversale (fig. 4.42).

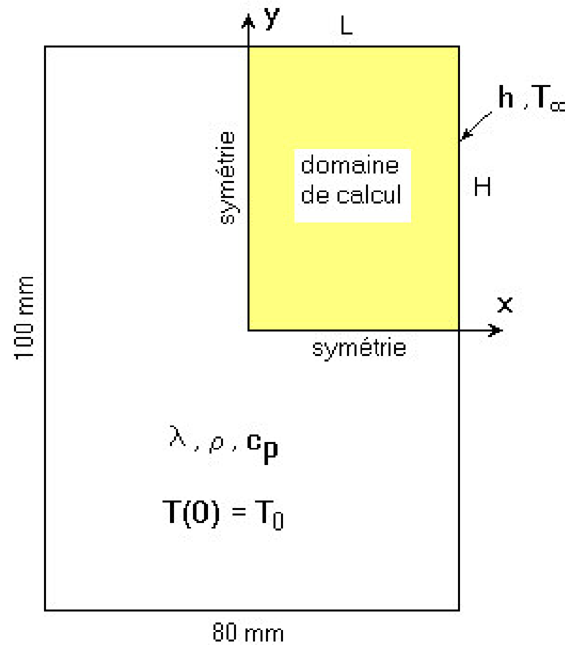


Fig. 4.42 *Section transversale par la barre rectangulaire.*

Le domaine de calcul découpé sur la fig. 4.42 est présenté à la fig. 4.43. On considère un maillage à 30 noeuds comme dans l'exemple 1 ($\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$).

L'équation différentielle qui gouverne le régime transitoire de la barre est la suivante :

$$\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right). \qquad (4.162)$$

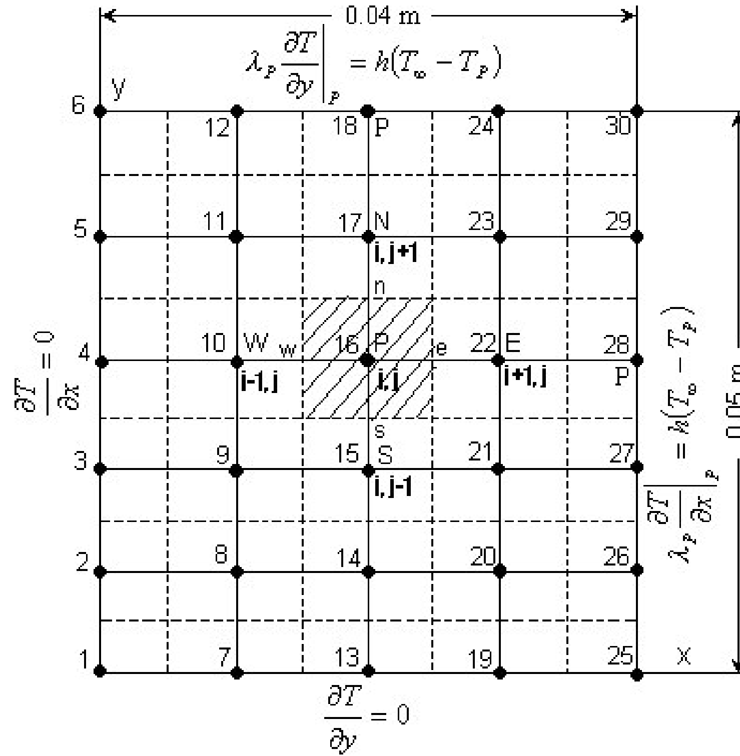


Fig. 4.43 Maillage 2D pour le domaine de calcul.

Pour obtenir l'équation discrétisée pour un noeud intérieur du domaine de calcul (le noeud 16 par exemple) on intègre l'équation (4.162) sur le volume de contrôle hachuré autour du noeud 16 (fig. 4.43). En utilisant le schéma totalement implicite on obtient (voir l'obtention de l'équation (4.155)) :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b\,, \tag{4.163}$$

où $a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w}$ $a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e}$ $a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s}$ $a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n}$,

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \qquad b = a_p^0 T_P^0\ ,$$

$$A_w = A_e = \Delta y \cdot 1 \qquad A_s = A_n = \Delta x \cdot 1\,,$$

le terme source S étant nul dans notre exemple.

Les valeurs numériques des coefficients de l'équation (4.163), dans les conditions d'un maillage uniforme, sont :

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35\ ;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} = 1000 \cdot 3500 \cdot \frac{0.01 \cdot 0.01}{0.1} = 3500\ ;$$

$a_P = 35 + 35 + 35 + 35 + 3500 = 3640$;

$b = 3500 \cdot T_P^0$.

L'équation (4.163) s'applique successivement pour les noeuds intérieurs du domaine de calcul (les noeuds 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, et 23) et on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
3640T_8 &= 35T_2 + 35T_{14} + 35T_7 + 35T_9 + 3500T_8^0 \\
3640T_9 &= 35T_3 + 35T_{15} + 35T_8 + 35T_{10} + 3500T_9^0 \\
3640T_{10} &= 35T_4 + 35T_{16} + 35T_9 + 35T_{11} + 3500T_{10}^0 \\
3640T_{11} &= 35T_5 + 35T_{17} + 35T_{10} + 35T_{12} + 3500T_{11}^0 \\
3640T_{14} &= 35T_8 + 35T_{20} + 35T_{13} + 35T_{15} + 3500T_{14}^0 \\
3640T_{15} &= 35T_9 + 35T_{21} + 35T_{14} + 35T_{16} + 3500T_{15}^0 \\
3640T_{16} &= 35T_{10} + 35T_{22} + 35T_{15} + 35T_{17} + 3500T_{16}^0 \\
3640T_{17} &= 35T_{11} + 35T_{23} + 35T_{16} + 35T_{18} + 3500T_{17}^0 \\
3640T_{20} &= 35T_{14} + 35T_{26} + 35T_{19} + 35T_{21} + 3500T_{20}^0 \\
3640T_{21} &= 35T_{15} + 35T_{27} + 35T_{20} + 35T_{22} + 3500T_{21}^0 \\
3640T_{22} &= 35T_{16} + 35T_{28} + 35T_{21} + 35T_{23} + 3500T_{22}^0 \\
3640T_{23} &= 35T_{17} + 35T_{29} + 35T_{22} + 35T_{24} + 3500T_{23}^0
\end{aligned} \qquad (4.164)$$

Pour un noeud intérieur sur la frontière "West", le noeud 4 par exemple, on intégre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.44.

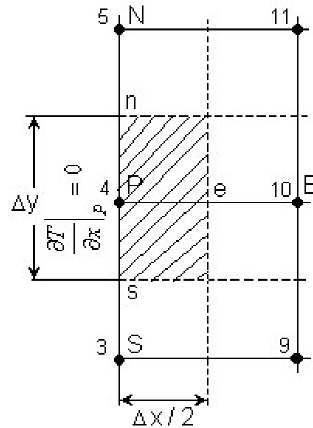


***Fig. 4.44** Demi-volume de contrôle sur la frontière "W".*

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/2VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx\, dy\, dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dy\, dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/2VC} \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\, dy\, dt \qquad (4.165)$$

L'intégration de l'équation (4.165) donne :

$$\rho c_p\left(T_P - T_P^0\right)\frac{\Delta x}{2}\Delta y = \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_e\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_P\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P\right)\Delta y\, dt + \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_n\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_s\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right)\frac{\Delta x}{2}dt$$

En tenant compte que $\left(\partial T / \partial x\right)_P = 0$ (condition à la limite sur la frontière West), en supposant une variation linéaire du gradient de température et en utilisant le schéma totalement implicite pour l'intégration dans le temps, on obtient :

$$\rho c_p\left(T_P - T_P^0\right)\frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_n} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s}, \qquad (4.166)$$

où $A_e = \Delta y$ et $A_s = A_n = \Delta x / 2$.

En regroupant les termes, dans l'équation (4.166), on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \qquad (4.167)$$

où $a_E = \dfrac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \qquad a_S = \dfrac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \qquad a_N = \dfrac{\lambda_n A_n}{\delta y_n}$;

$$a_P = a_E + a_S + a_N + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \qquad b = a_p^0 T_P^0.$$

Les valeurs numériques des coefficients pour l'équation (4.167) sont les suivantes :

$$a_E = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35 \qquad a_S = a_N = \frac{35 \cdot (\frac{0.01}{2} \cdot 1)}{0.01} = 17.5 \;;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} = 1000 \cdot 3500 \cdot \frac{0.01 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.1} = 1750 \;;$$

$$a_P = 35 + 17.5 + 17.5 + 1750 = 1820 \qquad b = 1750 \cdot T_P^0.$$

Les équations discrétisées pour les noeuds intérieurs sur la frontières "West" (les noeuds 2, 3, 4 et 5) sont :

$$\begin{aligned}
1820T_2 &= 35T_8 + 17.5T_1 + 17.5T_3 + 1750T_2^0 \\
1820T_3 &= 35T_9 + 17.5T_2 + 17.5T_4 + 1750T_3^0 \\
1820T_4 &= 35T_{10} + 17.5T_3 + 17.5T_5 + 1750T_4^0 \\
1820T_5 &= 35T_{11} + 17.5T_4 + 17.5T_6 + 1750T_5^0
\end{aligned} \qquad (4.168)$$

Pour un noeud intérieur sur la frontière "South", le noeud 13 par exemple, on intègre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.45 et on obtient :

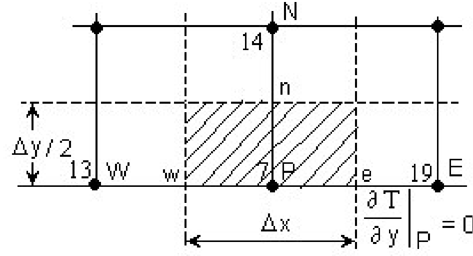


Fig. 4.45 *Demi-volume de contrôle sur la frontière "S"*

$$\rho c_p\left(T_P - T_P^0\right)\Delta x\frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_e\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_w\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right)\frac{\Delta y}{2}dt + \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_n\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_P\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P\right)\Delta x\, dt\,. \tag{4.169}$$

En tenant compte que $(\partial T/\partial y)_P = 0$ (condition à la limite sur la frontière "South"), en remplaçant les gradients de température aux points $\mathrm{e, w, et\, n}$ et en utilisant le schéma totalement implicite pour l'intégration dans le temps, on obtient l'équation discrétisée sous la forme générale :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + b\,, \tag{4.170}$$

où $\quad a_W = \dfrac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \dfrac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \qquad a_N = \dfrac{\lambda_n A_n}{\delta y_n}\,;$

$$a_P = a_W + a_E + a_N + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_p\frac{\Delta x\Delta y}{2\Delta t} \qquad b = a_P^0 T_P^0\ ;$$

$$A_e = A_w = \frac{\Delta y}{2}\cdot 1 \text{ et } A_n = \Delta x \cdot 1\,.$$

Les valeurs des coefficients, de l'équation (4.170), sont :

$$a_W = a_E = \frac{35\cdot\left(\dfrac{0.01}{2}\cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \qquad a_N = \frac{35\cdot(0.01\cdot 1)}{0.01} = 35\ ;$$

$$a_P^0 = \rho c_p\frac{\Delta x\Delta y}{2\Delta t} = 1000\cdot 3500\cdot\frac{0.01\cdot 0.01}{2\cdot 0.1} = 1750\ ;$$

$$a_P = 17.5 + 17.5 + 35 + 1750 = 1820 \qquad b = 1750\cdot T_P^0\,.$$

Les équations discrétisée pour les noeuds 7, 13 et 19 sont les suivantes :

$$1820T_7 = 17.5T_1 + 17.5T_{13} + 35T_8 + 1750T_7^0$$

$$1820T_{13} = 17.5T_7 + 17.5T_{19} + 35T_{14} + 1750T_{13}^0 \tag{4.171}$$
$$1820T_{19} = 17.5T_{13} + 17.5T_{25} + 35T_{20} + 1750T_{19}^0$$

L'équation discrétisée pour le noeud 1 est obtenue en intégrant l'équation (4.162) sur le quart de volume de contrôle hachuré présenté à la fig. 4.46. Après la première intégration on obtient :

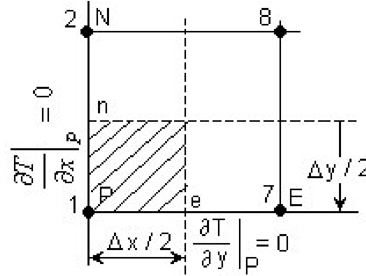


***Fig. 4.46** Quart de volume de contrôle (le coin W-S).*

$$\rho c_p\left(T_P - T_P^0\right)\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_e\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_P\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P\right)\frac{\Delta y}{2}dt + \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_n\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_P\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P\right)\frac{\Delta x}{2}dt \tag{4.172}$$

De la même façon, on obtient l'équation discrétisée pour le noeud 1 sous la forme générale suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_N T_N + b, \tag{4.173}$$

où $a_E = \dfrac{\lambda_e A_e}{\delta x_e}$ $\quad a_N = \dfrac{\lambda_n A_n}{\delta y_n}$ $\quad a_P^0 = \rho c_p \dfrac{\Delta x \Delta y}{4\Delta t}$;

$a_P = a_E + a_N + a_P^0 \qquad b = a_p^0 T_P^0$;

$A_e = (\Delta y/2)\cdot 1$ et $A_n = (\Delta x/2)\cdot 1$.

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.173) sont :

$$a_E = \frac{35\cdot\left(\frac{0.01}{2}\cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \qquad a_N = \frac{35\cdot\left(\frac{0.01}{2}\cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \ ;$$

$$a_P^0 = 1000\cdot 3500\frac{0.01\cdot 0.01}{4\cdot 0.1} = 875 \quad a_P = 17.5 + 17.5 + 875 = 910 \ ;$$

$$b = 875T_P^0.$$

On obtient ainsi l'équation discrétisée pour le noeud 1 :

$$910T_1 = 17.5T_7 + 17.5T_2 + 875T_1^0 \tag{4.174}$$

Pour un noeud intérieur sur la frontière "East", le noeud 28 par exemple, on intègre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.47.

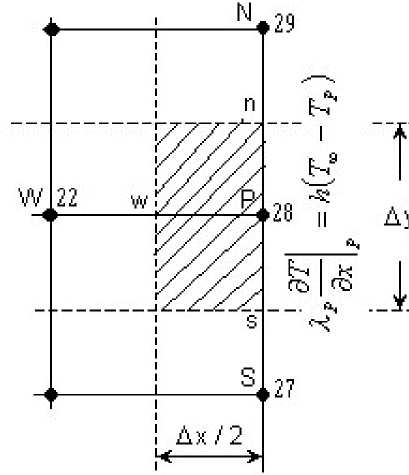


Fig. 4.47 *Demi-volume de contrôle sur la frontière "E".*

Après l'intégration dans l'espace et dans le temps pour la part gauche de l'équation et dans l'espace pour la part droite, on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\frac{\Delta x}{2}\Delta y = \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_P\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P - \lambda_w\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right)\Delta y\, dt + \int_t^{t+\Delta t}\left(\lambda_n\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_s\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right)\frac{\Delta x}{2}dt\,. \tag{4.175}$$

En tenant compte que sur cette frontière la condition à la limite est :

$$\lambda_P \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_P = h\left(T_\infty - T_P\right), \tag{4.176}$$

et en intégrant avec le schéma totalement implicite, on obtient, en remplaçant les gradients de température, l'équation suivante :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} = h\left(T_\infty - T_P\right)A_P - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + \lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_n} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s}\,. \tag{4.177}$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.177) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + b\,, \tag{4.178}$$

où $a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w}$ $\quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s}$ $\quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n}$ $\quad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t}$;

$$a_P = a_W + a_S + a_N + a_P^0 + hA_P \qquad b = a_P^0 T_P^0 + hA_P T_\infty \;;$$

$$A_P = \Delta y \cdot 1,\; A_w = \Delta y \cdot 1 \text{ et } A_s = A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.178) sont :

$$a_S = a_N = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \qquad a_W = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35 \;;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} = 1000 \cdot 3500 \cdot \frac{0.01 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.1} = 1750 \;;$$

$$a_P = 35 + 17.5 + 17.5 + 1750 + 100(0.01 \cdot 1) = 1821 \;;$$

$$b = 1750 \cdot T_P^0 + 100 \cdot (0.01 \cdot 1) \cdot 25 = 1750 T_P^0 + 25 \;;$$

Les équations à résoudre pour les noeuds intérieurs de la frontière "East" (les noeuds 26, 27, 28 et 29) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
1821 T_{26} &= 35 T_{20} + 17.5 T_{25} + 17.5 T_{27} + 1750 T_{26}^0 + 25 \\
1821 T_{27} &= 35 T_{21} + 17.5 T_{26} + 17.5 T_{28} + 1750 T_{27}^0 + 25 \\
1821 T_{28} &= 35 T_{22} + 17.5 T_{27} + 17.5 T_{29} + 1750 T_{28}^0 + 25 \\
1821 T_{29} &= 35 T_{23} + 17.5 T_{28} + 17.5 T_{30} + 1750 T_{29}^0 + 25
\end{aligned} \qquad (4.179)$$

Pour un noeud situé sur la frontière "North", le noeud 18 par exemple, on intègre l'équation (4.162) sur le demi-volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.48.

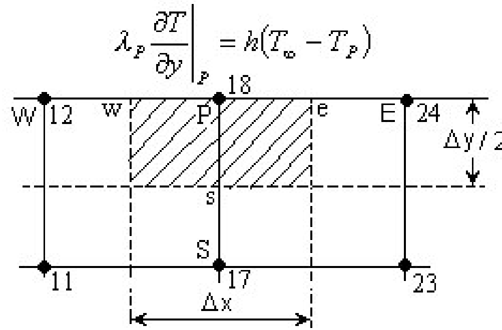


Fig. 4.48 *Demi-volume de contrôle sur la frontière "N".*

$$\rho c_p (T_P - T_P^0) \Delta x \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_P - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x dt \qquad (4.180)$$

En tenant compte que sur cette frontière la condition à la limite est :

$$\lambda_P \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_P = h\left(T_\infty - T_P\right). \tag{4.181}$$

Après l'intégration de l'équation (4.180), on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + b, \tag{4.182}$$

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \qquad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \;;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_P^0 + hA_P \qquad b = a_P^0 T_P^0 + hA_P T_\infty$$

$$A_P = A_s = \Delta x \cdot 1 \text{ et } A_e = A_w = \left(\Delta y / 2\right) \cdot 1.$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.182) sont :

$$a_W = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \qquad a_E = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \;;$$

$$a_S = \frac{35 \cdot (0.01 \cdot 1)}{0.01} = 35 \qquad a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{2 \cdot 0.1} = 1750 \;;$$

$$a_P = 17.5 + 17.5 + 35 + 1750 + 100 \cdot (0.01 \cdot 1) = 1821 \;;$$

$$b = 1750 T_P^0 + 100 \cdot (0.01 \cdot 1) \cdot 25 = 1750 T_P^0 + 25 \;;$$

Les équations à résoudre, pour les noeuds intérieurs, sur la frontière "North" (les noeuds 12, 18 et 24 sont :

$$\begin{aligned} 1821 T_{12} &= 17.5 T_6 + 17.5 T_{18} + 35 T_{11} + 1750 T_{12}^0 + 25 \\ 1821 T_{18} &= 17.5 T_{12} + 17.5 T_{24} + 35 T_{17} + 1750 T_{18}^0 + 25 \\ 1821 T_{24} &= 17.5 T_{18} + 17.5 T_{30} + 35 T_{23} + 1750 T_{24}^0 + 25 \end{aligned} \tag{4.183}$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 30 on intègre l'équation (4.162) sur le quart du volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.49, c'est-à-dire

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx\,dy\,dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\,dy\,dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\,dy\,dt. \tag{4.184}$$

L'intégration de l'équation (4.184) donne :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right) \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P - \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right) \frac{\Delta x}{2} dt \tag{4.185}$$

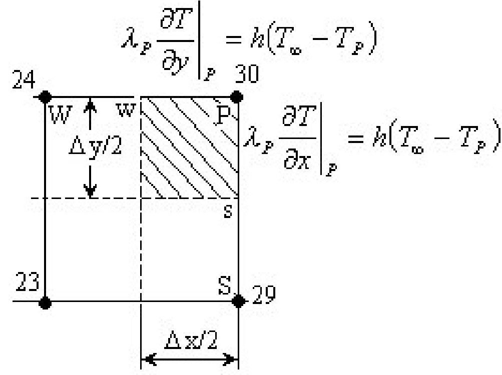


Fig.4.49 *Quart du volume de contrôle (le coin "N-E").*

En tenant compte de conditions aux limites sur les frontières "North" et "East" après l'intégration, on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\frac{\Delta x \Delta y}{4\Delta t} = h\left(T_\infty - T_P\right)\frac{\Delta y}{2} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} + h\left(T_\infty - T_P\right)\frac{\Delta x}{2} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s}. \quad (4.186)$$

En regroupant les termes, dans l'équation (4.186), on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud 30 :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + b \; ; \quad (4.187)$$

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \qquad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4\Delta t} \; ;$$

$$a_P = a_W + a_S + a_P^0 + h\left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2}\right) \qquad b = a_P^0 T_P^0 + hT_\infty\left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2}\right) \; ;$$

$$A_s = (\Delta x / 2) \cdot 1 \text{ et } A_w = \left(\Delta y / 2\right) \cdot 1 .$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.187) sont :

$$a_W = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \qquad a_S = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \; ;$$

$$a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{4 \cdot 0.1} = 875 \quad a_P = 17.5 + 17.5 + 875 + 100 \cdot \left(\frac{0.01 + 0,01}{2}\right) = 911$$

$$b = 875 T_P^0 + 100 \cdot 25 \cdot \left(\frac{0.01 + 0.01}{2}\right) = 875 T_P^0 + 25 .$$

L'équation à résoudre pour le noeud 30 est la suivante :

$$911T_{30} = 17.5T_{24} + 17.5T_{29} + 875T_{30}^0 + 25 \qquad (4.188)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 6 on intègre l'équation (4.162) sur le quart du volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.50.

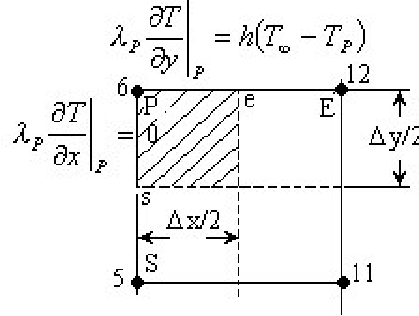


Fig. 4.50 *Quart du volume de contrôle (le coin "N-W").*

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial T}{\partial t} dx\,dy\,dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\,dy\,dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{1/4VC} \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx\,dy\,dt \,. \qquad (4.189)$$

L'intégration de l'équation (4.189) donne :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right) \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P \right) \frac{\Delta y}{2} dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_P \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s \right) \frac{\Delta x}{2} dt \qquad (4.190)$$

En tenant compte de conditions aux limites sur les frontières "North" et "West" après l'intégration on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right) \frac{\Delta x \Delta y}{4\Delta t} = \lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} + h(T_\infty - T_P)\frac{\Delta x}{2} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_S}{\delta y_s} \,. \qquad (4.191)$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.191), on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud 6 :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_S T_S + b \;; \qquad (4.192)$$

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_e} \qquad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_s} \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4\Delta t} \;;$$

$$a_P = a_E + a_S + a_P^0 + h\frac{\Delta x}{2} \qquad b = a_P^0 T_P^0 + hT_\infty \frac{\Delta x}{2} \;;$$

$$A_s = (\Delta x / 2)\cdot 1 \text{ et } A_e = (\Delta y / 2)\cdot 1 .$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.192) sont :

$$a_E = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \qquad a_S = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \ ;$$

$$a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{4 \cdot 0.1} = 875 \quad a_P = 17.5 + 17.5 + 875 + 100 \cdot \frac{0.01}{2} = 911.5 \ ;$$

$$b = 875 T_P^0 + 100 \cdot 25 \cdot \frac{0.01}{2} = 875 T_P^0 + 12.5 \ ;$$

L'équation à résoudre pour le noeud 6 est la suivante :

$$911.5 T_6 = 17.5 T_{12} + 17.5 T_5 + 875 T_6^0 + 12.5 . \qquad (4.193)$$

Pour obtenir l'équation discrétisée pour le noeud 25 on intègre l'équation (4.162) sur le quart du volume de contrôle hachuré et présenté à la fig. 4.51.

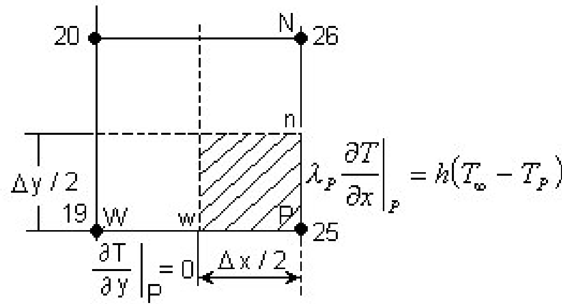


Fig. 4.51 *Quart du volume de contrôle (le coin "S-E").*

En intégrant de la même façon que pour le noeud 6 on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_N T_N + b \ ; \qquad (4.194)$$

$$a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_w} \qquad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_n} \qquad a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{4 \Delta t} \ ;$$

$$a_P = a_W + a_N + a_P^0 + h \frac{\Delta y}{2} \qquad b = a_P^0 T_P^0 + h T_\infty \frac{\Delta y}{2} \ ;$$

$$A_n = (\Delta x / 2) \cdot 1 \text{ et } A_w = (\Delta y / 2) \cdot 1 .$$

Les valeurs des coefficients de l'équation (4.194) sont :

$$a_W = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \qquad a_N = \frac{35 \cdot \left(\frac{0.01}{2} \cdot 1\right)}{0.01} = 17.5 \ ;$$

$$a_P^0 = 1000 \cdot 3500 \frac{0.01 \cdot 0.01}{4 \cdot 0.1} = 875 \qquad a_P = 17.5 + 17.5 + 875 + 100 \cdot \frac{0.01}{2} = 911.5 \;;$$

$$b = 875 T_P^0 + 100 \cdot 25 \cdot \frac{0.01}{2} = 875 T_P^0 + 12.5 \,.$$

L'équation à résoudre pour le noeud 25 est la suivante :

$$911.5 T_{25} = 17.5 T_{19} + 17.5 T_{26} + 875 T_{25}^0 + 12.5 \,. \tag{4.195}$$

Les équations (4.164), (4.168), (4.171), (4.174), (4.179), (4.183), (4.188), (4.193), et (4.195) forment le système d'équations à résoudre. Pour la résolution de ce système, on applique l'algorithme de Thomas adapté aux problèmes 2D comme à l'exemple 1. À la figure 4.52 on présente la solution numérique après $\Delta t = 10\,\text{s}$ et à la figure 4.53 après $\Delta t = 1000\,\text{s}$.

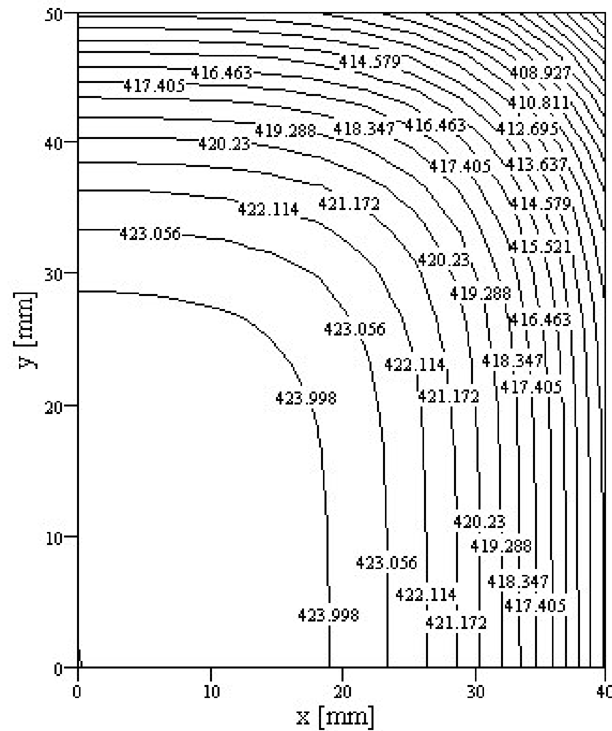


Fig. 4.52 *Distribution spatiale du champ thermique à l'instant* $t = 10\,\text{s}$.

Dans le tableau 4.11 on présente une comparaison des solutions numériques obtenues par la méthode des volumes finis (le programme THERM2Di_2) et celle obtenue par la méthode des éléments finis (à l'aide du logiciel QuickField 4.2T).

À la figure 4.54 on présente une comparaison des solutions numériques en ce qui concerne l'évolution dans le temps de la température du point de coordonnées $(x = 40, y = 50)$. On constate qu'il y a une très bonne correspondance.

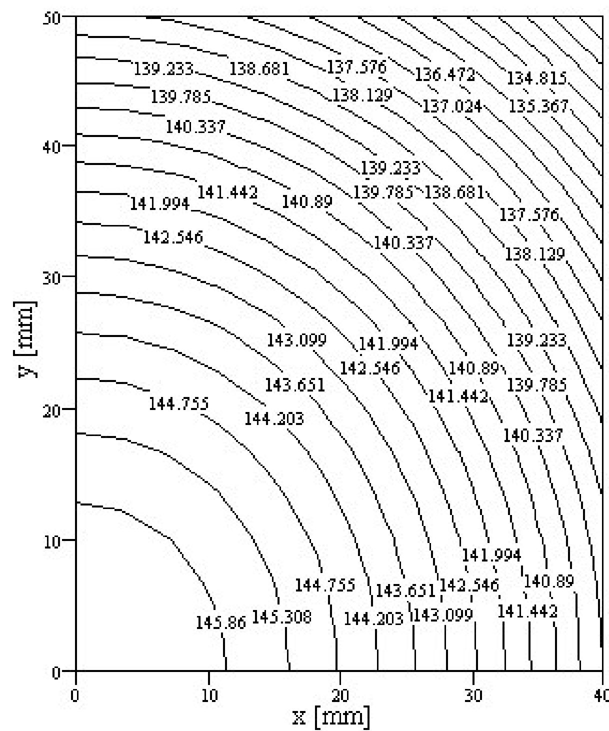


Fig. 4.53 *Distribution spatiale du champ thermique à l'instant* $t = 1000\,\text{s}$.

Tableau 4.11 Comparaison des résultats

$x = 40$ mm				
y [mm]	$t = 10$ s		$t = 100$ s	
	T [K]		T [K]	
	Volumes finis	QuickField	Volumes finis	QuickField
0	412.533	412.515	373.025	373.063
3.333	412.531	412.460	372.923	372.905
6.666	412.525	412.437	372.619	372.578
9.999	412.512	412.444	372.110	372.078
13.332	412.485	412.442	371.398	371.388
16.665	412.434	412.357	370.482	370.476
19.998	412.340	412.266	369.359	369.331
23.331	412.175	412.139	368.031	368.012
26.664	411.896	411.849	366.495	366.474
29.997	411.447	411.349	364.751	364.718
33.333	410.752	410.674	362.799	362.790
36.663	409.724	409.630	360.638	360.621
39.996	408.264	408.083	358.268	358.228
43.329	406.280	406.044	355.690	355.641
46.662	403.692	403.502	352.904	352.877
50.000	400.450	400.411	349.912	349.928

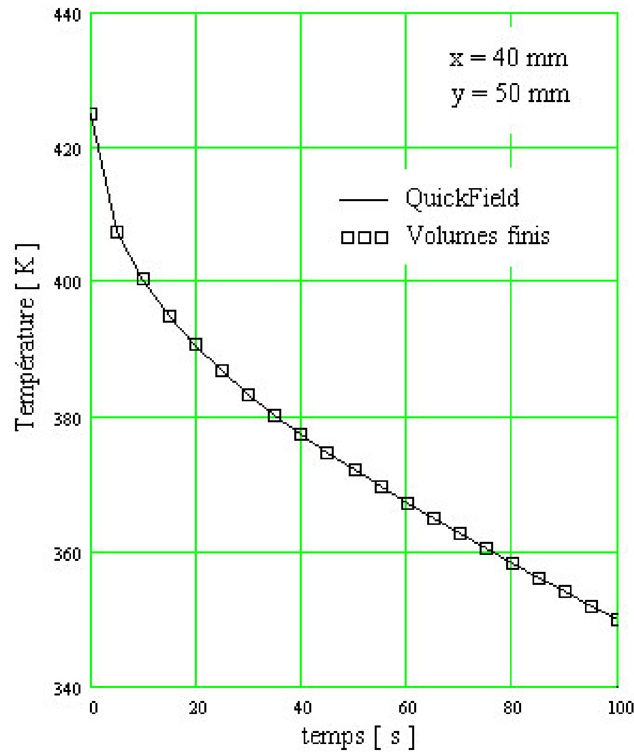


Fig. 4.54 *Évolution de la température dans le temps pour le point de coordonnées* $(40,50)\,\mathrm{mm}$ *(comparaison : volumes finis – QuickField).*

4.5 Conduction thermique en trois dimensions (3D)

4.5.1 Forme générale de l'équation discrétisée en 3D stationnaire

La conduction thermique 3D stationnaire est gouvernée par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+S=0\,. \tag{4.196}$$

Le volume de contrôle contenant le noeud P a six noeuds voisins identifiés comme les noeuds "West", "East", "South", "North", "Bottom" et "Top" (W, E, S, N, T, B). Comme dans le cas 2D les notations $\mathrm{w, e, s, n, b}$ et t font référence aux faces "west", "est", "sud", "north", "top" et "bottom" respectivement.

On intègre l'équation (4.196) sur le volume de contrôle, en trois dimensions ($dV = dx\,dy\,dz$), présenté à la figure 4.55 :

$$\int_{VC}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz+\int_{VC}\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz+\int_{VC}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz+\int_{VC}S\,dV=0 \tag{4.197}$$

Si l'on note $A_e = A_w = \Delta y \Delta z$, $A_n = A_s = \Delta x \Delta z$, $A_t = A_b = \Delta x \Delta y$ l'intégration ci-dessus donne

$$\left[\lambda_e A_e \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \lambda_w A_w \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right] + \left[\lambda_n A_n \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n - \lambda_s A_s \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right] + \left[\lambda_t A_t \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_t - \lambda_b A_b \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_b\right] + \bar{S}\Delta V = 0 \quad (4.198)$$

En appliquant la même procédure que pour le cas 2D on obtient l'équation discrétisée :

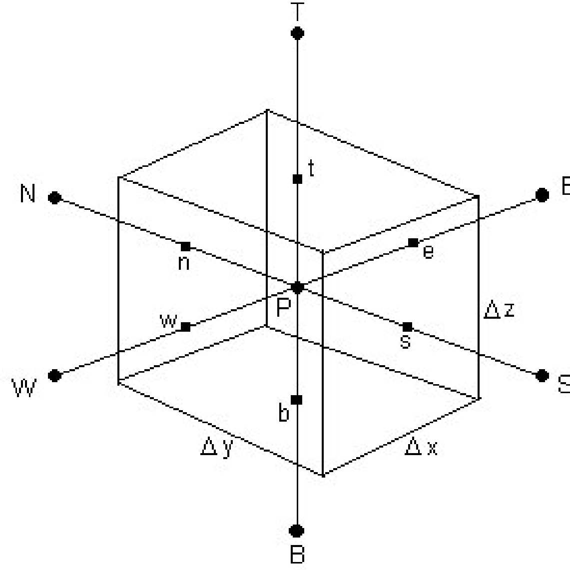


Fig. 4.55 *Volume de contrôle en trois dimensions.*

$$\left[\lambda_e A_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_{PE}} - \lambda_w A_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_{WP}}\right] + \left[\lambda_n A_n \frac{T_N - T_P}{\delta y_{PN}} - \lambda_s A_s \frac{T_P - T_s}{\delta y_{SP}}\right] + \left[\lambda_t A_t \frac{T_T - T_P}{\delta z_{PT}} - \lambda_b A_b \frac{T_P - T_B}{\delta z_{BP}}\right] + \bar{S}\Delta x \Delta y \Delta z = 0 \quad (4.199)$$

En regroupant les termes dans l'équation ci-dessus on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour un noeud intérieur :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + a_B T_B + a_T T_T + b, \quad (4.200)$$

où $a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}}$ $\quad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}}$ $\quad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}}$ $\quad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{NP}}$;

$$a_B = \frac{\lambda_b A_b}{\delta z_{BP}} \qquad a_T = \frac{\lambda_t A_t}{\delta z_{PT}} \qquad a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P \Delta x \Delta y \Delta z \;;$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y \Delta z$$

Les conditions aux limites seront traitées comme dans le cas 2D.

4.5.2 Forme générale de l'équation discrétisée en 3D instationnaire

La conduction thermique 3D instationnaire est gouvernée par l'équation :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + S \qquad (4.201)$$

L'équation discrétisée obtenue d'après la procédure du paragraphe 4.5.1 avec le schéma totalement implicite est la suivante :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + a_B T_B + a_T T_T + b, \qquad (4.202)$$

où $\quad a_W = \frac{\lambda_w A_w}{\delta x_{WP}} \qquad a_E = \frac{\lambda_e A_e}{\delta x_{PE}} \qquad a_S = \frac{\lambda_s A_s}{\delta y_{SP}} \qquad a_N = \frac{\lambda_n A_n}{\delta y_{NP}} \;;$

$$a_B = \frac{\lambda_b A_b}{\delta z_{BP}} \qquad a_T = \frac{\lambda_t A_t}{\delta z_{PT}} \qquad a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^0 \;;$$

$$a_P^0 = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \qquad\qquad b = \overline{S} \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^0 T_P^0 .$$

$A_w = A_e$	$A_n = A_s$	$A_b = A_t$
$\Delta y \Delta z$	$\Delta x \Delta z$	$\Delta x \Delta y$

Si l'on peut linéariser le terme source par l'expression $\overline{S} = S_c + S_P T_P$ alors les coefficients a_P et b, de l'équation discrétisée, sont les suivants :

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \Delta z \;;$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^0 T_P^0 .$$

4.6 Application de la méthode des volumes finis en coordonnés cylindriques

4.6.1 Forme générale de l'équation discrétisée en 1D stationnaire

La méthode des volumes finis peut s'appliquer à tout type de maillages orthogonaux de la même façon que pour les maillages cartésiens. Pour cela on prend comme exemple l'équation de conservation de l'énergie (Elenbaas-Heller) valable pour une section transversale d'un plasma d'arc électrique. L'équation différentielle, en coordonnées cylindriques, est la suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda(T)\, r\,\frac{dT}{dr}\right) + S(T) = 0 \qquad S(T) = \sigma(T)E^2 - P_r(T)\,, \tag{4.203}$$

où $\sigma(T)$ est la conductivité électrique, E est le champ électrique et $P_r(T)$ est la puissance rayonnée ($W\,/\,m^3$) par la colonne de l'arc électrique.

En intégrant l'équation (4.203) sur le volume de contrôle autour du point "i" (fig. 4.56) on obtient :

$$\int_{VC}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda r\frac{dT}{dr}\right)dV + \int_{VC} SdV = 0 \tag{4.204}$$

où $dV = 2\pi r dr \cdot 1$.

En remplaçant dV dans l'équation (4.204) on obtient :

$$\int_{VC}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda r\frac{dT}{dr}\right)\cdot 2\pi r dr + \int_{VC} S\cdot 2\pi r dr = 0\,. \tag{4.205}$$

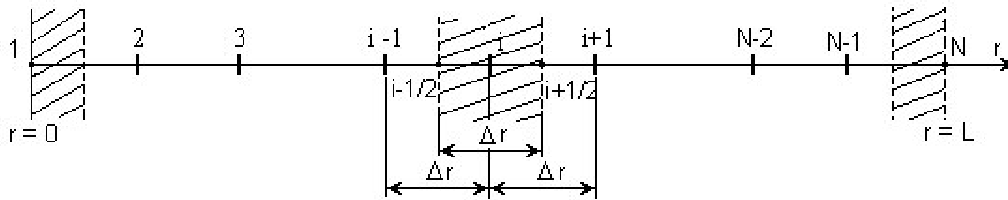


Fig. 4.56 *Maillage 1D en coordonnées cylindriques*

L'intégration (4.205) peut être écrite ainsi :

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2}\frac{d}{dr}\left(\lambda r\frac{dT}{dr}\right)dr + \int_{i-1/2}^{i+1/2} rSdr = 0\,. \tag{4.206}$$

L'intégration (4.206) donne :

$$\left(\lambda r\frac{dT}{dr}\right)_{i+1/2} - \left(\lambda r\frac{dT}{dr}\right)_{i-1/2} + \bar{S}_i\left.\frac{r^2}{2}\right|_{i-1/2}^{i+1/2} = 0\,, \tag{4.207}$$

ou

$$\lambda_{i+1/2} r_{i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} - \lambda_{i-1/2} r_{i-1/2} \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r} + \frac{\overline{S}_i}{2}\left(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2\right) = 0. \quad (4.208)$$

En regroupant les termes, on obtient la forme tridiagonale de l'équation discrétisée :

$$\lambda_{i-1/2} r_{i-1/2} T_{i-1} - \left(\lambda_{i-1/2} r_{i-1/2} + \lambda_{i+1/2} r_{i+1/2}\right) T_i + \lambda_{i+1/2} r_{i+1/2} T_{i+1} = -\overline{S}_i r_i (\Delta r)^2 .$$
$$i = 2 \cdots N-1$$
$$(4.209)$$

4.6.2 Conditions aux limites

1) Condition à la limite de type Dirichlet au point "1".

Si l'on met $i = 2$ dans l'équation (4.209) on obtient :

$$\lambda_{2-1/2} r_{2-1/2} T_1 - \left(\lambda_{2-1/2} r_{2-1/2} + \lambda_{2+1/2} r_{2+1/2}\right) T_2 + \lambda_{2+1/2} r_{2+1/2} T_3 = -r_2 \overline{S}_2 (\Delta r)^2 . \quad (4.210)$$

En tenant compte que T_1 est connue et donc le terme qui la contient passe comme un terme source, on obtient :

$$\left(\lambda_{2-1/2} r_{2-1/2} + \lambda_{2+1/2} r_{2+1/2}\right) T_2 + \lambda_{2+1/2} r_{2+1/2} T_3 = -r_2 \overline{S}_2 (\Delta r)^2 - \lambda_{2-1/2} r_{2-1/2} T_1 . \quad (4.211)$$

L'équation (4.211) est la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud "2" qui tient compte du fait que la température du noeud "1", T_1, est connue.

2) Condition à la limite de type Dirichlet au point "N".

Si l'on met $i = N-1$ dans l'équation (4.209) on obtient :

$$\lambda_{N-1-1/2} r_{N-1-1/2} T_{N-2} - \left(\lambda_{N-1-1/2} r_{N-1-1/2} + \lambda_{N-1+1/2} r_{N-1+1/2}\right) T_{N-1} + \lambda_{N-1+1/2} r_{N-1+1/2} T_N = - r_{N-1} \overline{S}_{N-1} (\Delta r)^2 \quad (4.212)$$

En tenant compte que T_N est connue et donc le terme qui la contient passe comme un terme source, on obtient :

$$\lambda_{N-1-1/2} r_{N-1-1/2} T_{N-2} - \left(\lambda_{N-1-1/2} r_{N-1-1/2} + \lambda_{N-1+1/2} r_{N-1+1/2}\right) T_{N-1} = - r_{N-1} \overline{S}_{N-1} (\Delta r)^2 - \lambda_{N-1+1/2} r_{N-1+1/2} T_N \quad (4.213)$$

L'équation (4.213) est la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud "$N-1$" qui tient compte du fait que la température du noeud "N", T_N, est connue.

3) Condition à la limite de type Neumann au point "1".

En intégrant l'équation (4.204) sur le demi-volume de contrôle présenté à la figure (4.57) on obtient :

$$\int_1^{1+1/2} \frac{d}{dr}\left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right) dr + \int_1^{1+1/2} r S dr = 0 . \quad (4.214)$$

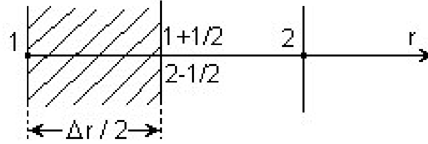


Fig. 4.57 *Demi-volume de contrôle autour du point "1".*

L'intégration de l'équation (4.214) donne :

$$\left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right)_{1+1/2} - \left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right)_1 + \frac{S_1}{2}\left(r_{1+1/2}^2 - r_1^2\right) = 0 . \tag{4.215}$$

En tenant compte de la condition à la limite au point "1" qui s'exprime $(dT / dr)_1 = 0$, et donc le deuxième terme de l'équation (4.215) est nul, on obtient :

$$\lambda_{1+1/2} r_{1+1/2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta r} = -\frac{S_1}{2}\left(r_{1+1/2}^2 - r_1^2\right). \tag{4.216}$$

En regroupant les termes, l'équation discrétisée pour le point "1" est la suivante :

$$-\lambda_{1+1/2} r_{1+1/2} T_1 + \lambda_{1+1/2} r_{1+1/2} T_2 = -\frac{S_1 (\Delta r)^2}{4}\left(r_{1+1/2} + r_1\right) \tag{4.217}$$

4) Condition à la limite de type Neumann au point "N".

En intégrant l'équation (4.204) sur le demi-volume de contrôle de la figure 4.58, on obtient :

$$\int_{N-1/2}^{N} \frac{d}{dr}\left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right) dr + \int_{N-1/2}^{N} rS dr = 0 . \tag{4.218}$$

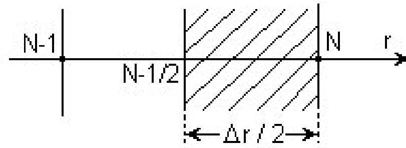


Fig. 4.58 *Demi-volume de contrôle autour du point " N ".*

L'intégration de l'équation (4.218) donne :

$$\left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right)_N - \left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right)_{N-1/2} + \frac{S_N}{2}\left(r_N^2 - r_{N-1/2}^2\right) = 0 . \tag{4.219}$$

En tenant compte de la condition à la limite au point " N " qui s'exprime $(dT / dr)_N = 0$, et donc le premier terme de l'équation (4.219) est nul, on obtient la forme générale de l'équation discrétisée pour le noeud " N " :

$$\lambda_{N-1/2} r_{N-1/2} T_{N-1/2} - \lambda_{N-1/2} r_{N-1/2} T_N = -\frac{S_N (\Delta r)^2}{4} \left(r_N + r_{N-1/2} \right). \qquad (4.220)$$

4.6.3 Application numérique

Soit un domaine d'analyse avec $R = 0.008\,\text{mm}$, $\lambda = 20\,\text{W/mK}$, $S = 2 \cdot 10^8\,\text{W/m}^3$ et le maillage présenté à la figure 4.59. Les conditions aux limites sont de type Neumann au point 1 et Dirichlet au point 5 ($T_5 = 400\,\text{K}$).

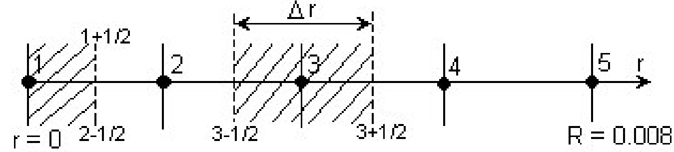


Fig. 4.59 *Maillage 1D en coordonnées cylindriques.*

L'équation discrétisée pour le noeud 1 en tenant compte que la conductivité thermique $\lambda = cste$ et $S = cste$ (voir l'équation (4.217)) devient :

$$- r_{1+1/2} T_1 + r_{1+1/2} T_2 = -\frac{S(\Delta r)^2}{4\lambda} \left(r_1 + r_{1+1/2} \right). \qquad (4.221)$$

L'équation discrétisée pour les noeuds 2 et 3 devient (voir l'équation (4.209)) :

$$r_{2-1/2} T_1 - \left(r_{2-1/2} + r_{2+1/2} \right) T_2 + r_{2+1/2} T_3 = -\frac{S(\Delta r)^2}{\lambda} r_2 . \qquad (4.222)$$

$$r_{3-1/2} T_2 - \left(r_{3-1/2} + r_{3+1/2} \right) T_3 + r_{3+1/2} T_4 = -\frac{S(\Delta r)^2}{\lambda} r_3 . \qquad (4.223)$$

L'équation discrétisée pour le noeud 4 en tenant compte que T_5 est connue devient :

$$r_{4-1/2} T_3 - \left(r_{4-1/2} + r_{4+1/2} \right) T_4 = -\frac{S(\Delta r)^2}{\lambda} r_4 - r_{4+1/2} T_5 . \qquad (4.224)$$

En remplaçant les valeurs numériques dans les équations (4.221), (4.222), (4.223) et (4.224) on obtient le système d'équations algébriques à résoudre :

$$\begin{aligned} &- T_1 + T_2 = -10 \\ &T_1 - 4T_2 + 3T_3 = -80 \\ &3T_2 - 8T_3 + 5T_4 = -160 \\ &5T_3 - 12T_4 = -3040 \end{aligned} \qquad (4.225)$$

ou, sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -80 \\ -160 \\ -3040 \end{bmatrix} \tag{4.226}$$

La solution du système algébrique est :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560 \\ 550 \\ 520 \\ 470 \end{bmatrix}, \tag{4.227}$$

ce qui correspond exactement avec les valeurs calculées à l'aide de la formule analytique donnée par la relation (fig. 4.60) :

$$T(r) = T_R + \frac{SR^2}{4\lambda}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right). \tag{4.228}$$

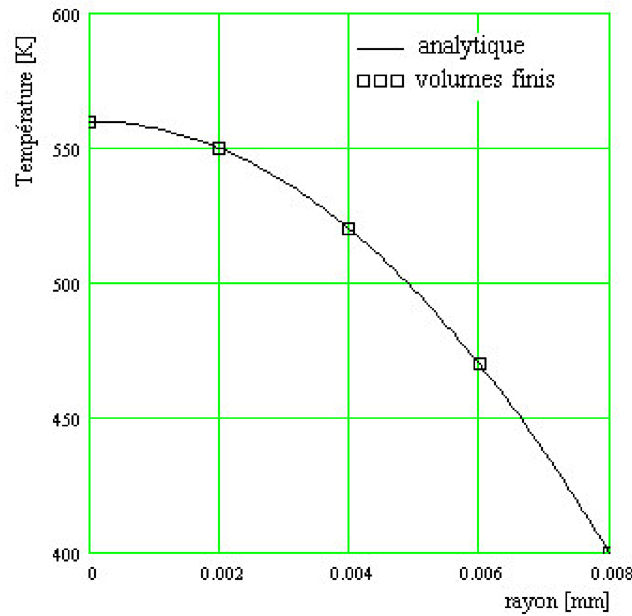


Fig. 4.60 *Comparaison de la solution numérique avec la solution analytique.*

Dans le cas de l'équation Elenbaas-Helller, la conductivité thermique, λ, est en fonction de la température ($\lambda(T)$), la conductivité électrique σ est aussi en fonction de la température ($\sigma(T)$), et la puissance rayonnée est en fonction de la température ($P_r(T)$). Ces fonctions sont présentées aux figures 4.61, 4.62 et 4.63 pour le cas d'un plasma d'arc électrique en hexafluorure de soufre (SF_6), à la pression de $0.4\,\text{MPa}$. Dans ces conditions l'équation à résoudre est fortement nonlinéaire. L'algorithme de résolution doit respecter les étapes présentées au paragraphe 4.1.3.

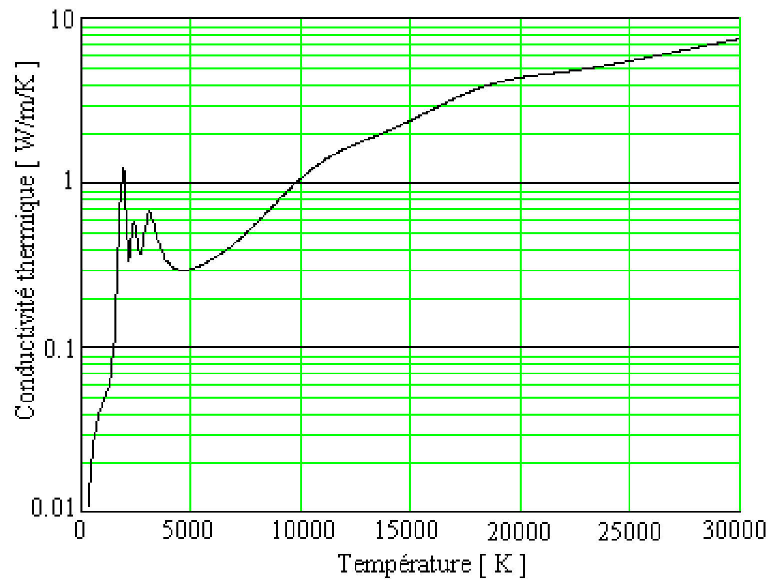


Fig. 4.61 *Conductivité thermique du plasma de SF_6.*

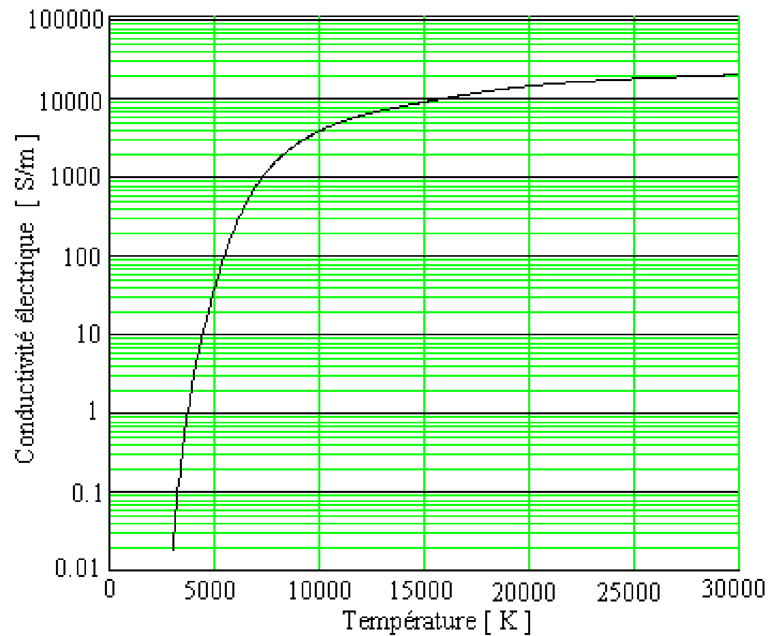


Fig. 4.62 *Conductivité électrique du plasma de SF_6.*

À la figure 4.64 sont présentées les solutions numériques, pour différentes valeurs du champ électrique E, obtenues à l'aide d'un programme réalisé en Fortran. Comme la solution analytique n'existe pas dans le cas nonlinéaire, il faut vérifier si le code numérique fournie une solution correcte ou pas. Pour cela, soit on compare la solution numérique avec les données expérimentales, soit on fait une *validation numérique* des résultats numériques.

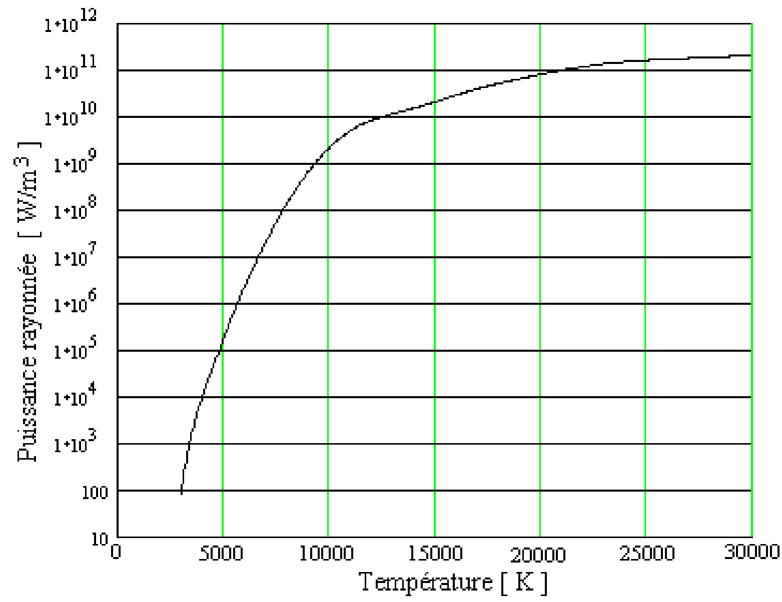


Fig. 4.63 *Puissance rayonnée par le plasma de SF_6.*

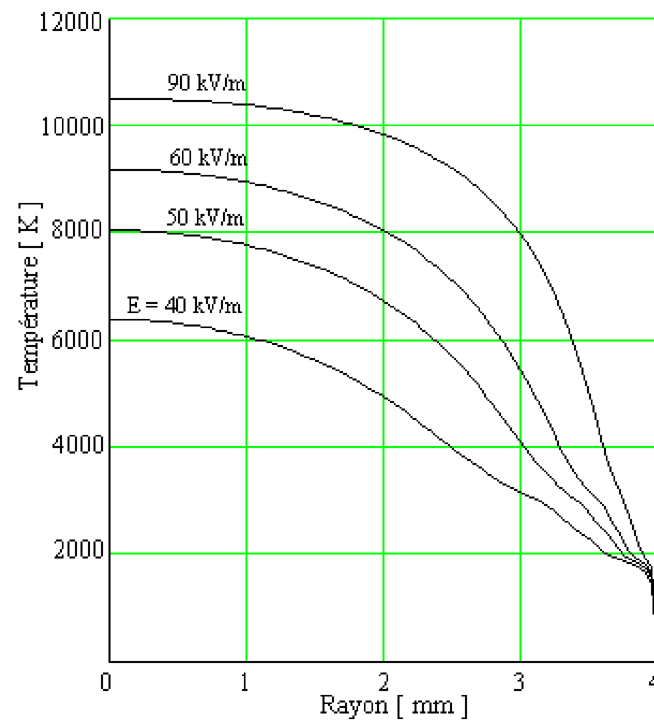


Fig. 4.64 *Profil radial de température.*

4.6.4 Validation numérique

Si dans le code numérique on impose des valeurs constantes pour la conductivité thermique, λ, et pour le terme source, S, alors l'équation (4.204) a une solution analytique

donnée par la formule (4.228). Si les résultats numériques, obtenus pour des valeurs constantes des gandeurs λ et S, correspondent (sauf les érreurs de calcul numérique) avec la solution analytique on dit qu'on a fait la validation numérique du code. À la figure 4.65 est présenté le résultat de la validation du code numérique pour deux valeurs du terme source et pour une valeur constante de la conductivité thermique ($\lambda = 20$ W/m/K). On constate une parfaite correspondance entre la solution numérique et la solution analytique.

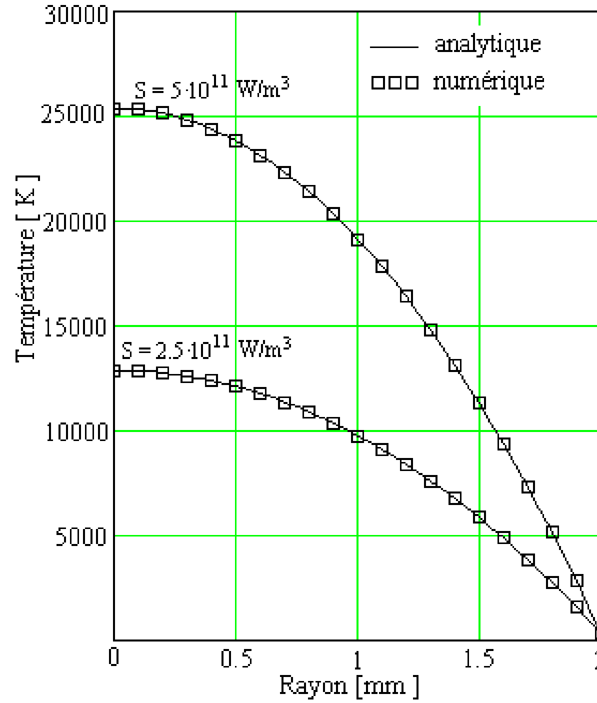


Fig. 4.65 *Exemple de validation numérique.*

Remarques

1. À cause du fait que l'équation est fortement non-linéaire, le processus itératif peut devenir instable. Il ne faut oublier qu'à chaque itération la résolution est faite avec les coefficients calculés à l'aide de la solution de l'itération précedente. Pour éviter, dans certains cas, les instabilités il est nécessaire d'utiliser la sous-relaxation. Soit, par exemple, T la valeur de la température calculée à l'itération courante et T^* la valeur calculée à l'itération précedente. La nouvelle valeur, T_{nouv}, pour l'itération suivante peut être écrite ainsi :

$$T_{nouv} = \alpha T + (1 - \alpha) T^*, \tag{4.229}$$

où $0 < \alpha < 1$ est un facteur de relaxation.

2. Un processus itératif converge quand les itérations suivantes ne produisent plus des changements significatifs pour la valeur de l'inconnue. Dans la pratique, le processus itératif est arrêté quand un critère de convergence est satisfait. Le choix d'un critère de convergence adéquate dépend de la nature du problème résolu et des objectifs du calcul numérique. Le plus souvent on examine la grandeur la plus significative (la température, la tension d'arc, etc.). On continue les itérations jusqu'à quand on ne constate plus un changement essentiel, de cette

grandeur, entre deux itérations successives (par exemple, le plus grand changement, de cette grandeur, de tous les points du domaine de calcul soit inférieur à une valeur imposée).

Mais, quand on utilise la sous-relaxation le changement de l'inconnue entre deux itérations successives est spécialement réduit ce qui crée l'illusion de convergence. La meilleure solution de monitorage de la convergence est d'examiner comment l'équation discrétisée est satisfaite par les valeurs courantes de l'inconnue. Ainsi, pour chaque point du maillage un résidu peut être calculé par la formule :

$$R = \sum a_{vs} T_{vs} + b - a_P T_P \, . \qquad (4.230)$$

La valeur de R devient nulle quand l'équation discrétisée est satisfaite. Un critère de convergence peut être imposé, par exemple, la valeur de $|R|$ doit être inférieure à une valeur fixée.

4.6.5 Forme générale de l'équation discrétisée en 2D stationnaire

L'équation de conduction thermique en 2D stationnaire est la suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + S = 0 \, . \qquad (4.231)$$

Pour obtenir la forme générale de l'équation discrétisée on intègre l'équation (4.231) sur le volume de contrôle présenté à la figure 4.66.

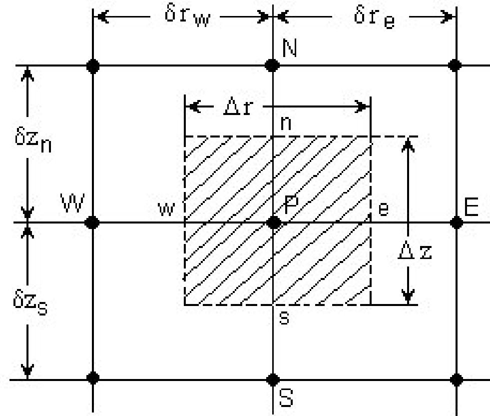


***Fig. 4.66** Volume de contrôle 2D en coordonnées cylindriques.*

$$\int_{VC} \frac{1}{r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) dV + \int_{VC} \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) dV + \int_{VC} S dV = 0 \qquad (4.232)$$

où $dV = 2\pi r \, dr \, dz$ et en remplaçant dans l'équation (4.232) on obtient :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) dr dz + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) r dr dz + \int_w^e \int_s^n S r dr dz = 0 \, . \qquad (4.233)$$

L'intégration ci-dessus donne :

$$\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right)_w^e \Delta z + \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_s^n \frac{r^2}{2}\bigg|_w^e + \bar{S}\Delta z \frac{r^2}{2}\bigg|_w^e = 0, \tag{4.234}$$

ou

$$\left(\lambda_e r_e \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_e - \lambda_w r_w \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_w\right)\Delta z + \left(\lambda_n \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_n - \lambda_s \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s\right)\left(\frac{r_e^2 - r_w^2}{2}\right) + \bar{S}\Delta z\left(\frac{r_e^2 - r_w^2}{2}\right) = 0. \tag{4.235}$$

En remplaçant les gradients de température, dans l'équation (4.235), on obtient :

$$\lambda_e r_e \frac{T_E - T_P}{\delta r_e}\Delta z - \lambda_w r_w \frac{T_P - T_W}{\delta r_w}\Delta z + \lambda_n \frac{T_N - T_P}{\delta z_n} r_P \Delta r - \lambda_s \frac{T_P - T_S}{\delta z_s} r_P \Delta r + \bar{S}\Delta z\, r_P \Delta r = 0, \tag{4.236}$$

où $\left(r_e^2 - r_w^2\right)/2 = r_P \Delta r$.

En regroupant les termes dans l'équation (4.236) on obtient ainsi la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b, \tag{4.237}$$

où $a_W = \dfrac{\lambda_w r_w \Delta z}{\delta r_w}$ $\quad a_E = \dfrac{\lambda_e r_e \Delta z}{\delta r_e}$;

$a_S = \dfrac{\lambda_s r_P \Delta r}{\delta z_s}$ $\quad a_N = \dfrac{\lambda_n r_P \Delta r}{\delta z_n}$;

$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N$ $\quad b = \bar{S} r_P \Delta r \Delta z$;

4.6.6 Forme générale de l'équation discrétisée en 2D instationnaire

L'équation de conduction thermique en 2D instationnaire est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + S. \tag{4.238}$$

On intègre l'équation (4.238) sur le volume de contrôle présenté à la figure 4.47.

$$\rho c_p \int_t^{t+\Delta t}\int_{VC} \frac{\partial T}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t}\int_{VC} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t}\int_{VC} \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t}\int_{VC} S dV dt, \tag{4.239}$$

où $dV = 2\pi r dr dz$. En introduisant dans l'équation ci-dessus l'expression de dV on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right)\int_w^e \int_s^n r dr dz = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) r dr dz dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) r dr dz dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n S r dr dz dt \tag{4.240}$$

En intégrant d'après les coordonnées spatiales on obtient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right) r_P \Delta r \Delta z = \int_t^{t+\Delta t} \left(\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_e - \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_w\right)\Delta z dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_n - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_s\right) r_P \Delta r dt + \int_t^{t+\Delta t} \overline{S} r_P \Delta r \Delta z dt \tag{4.241}$$

En supposant une variation linéaire du gradient de température, l'équation (4.241) devient :

$$\rho c_p \left(T_P - T_P^0\right) r_P \Delta r \Delta z = \int_t^{t+\Delta t} \left(r_e \lambda_e \frac{T_E - T_P}{\delta r_e} - r_w \lambda_w \frac{T_P - T_W}{\delta r_w}\right)\Delta z dt + \int_t^{t+\Delta t} \left(\lambda_n \frac{T_N - T_P}{\delta z_n} - \lambda_s \frac{T_P - T_s}{\delta z_s}\right) r_p \Delta r dt + \int_t^{t+\Delta t} \overline{S} r_P \Delta r \Delta z dt \tag{4.242}$$

En utilisant un schéma totalement implicite, après l'intégration dans le temps on obtient

$$\rho c_P \left(T_P - T_P^0\right)\frac{r_P \Delta r \Delta z}{\Delta t} = \lambda_e r_e \Delta z \frac{T_E - T_P}{\delta r_e} - \lambda_w r_w \Delta z \frac{T_P - T_W}{\delta r_w} + \lambda_n r_P \Delta r \frac{T_N - T_P}{\delta z_n} - \lambda_s r_P \Delta r \frac{T_P - T_S}{\delta z_s} + \overline{S} r_P \Delta r \Delta z \tag{4.243}$$

En regroupant les termes dans l'équation (4.243) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + b\,, \tag{4.244}$$

où

$$a_W = \frac{\lambda_w r_w \Delta z}{\delta r_w} \qquad a_E = \frac{\lambda_e r_e \Delta z}{\delta r_e} \qquad a_S = \frac{\lambda_s r_P \Delta r}{\delta z_s} \qquad a_N = \frac{\lambda_n r_P \Delta r}{\delta z_n}\;;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0 \qquad a_P^0 = \rho c_P r_P \frac{\Delta r \Delta z}{\Delta t}\;;$$

$$b = \overline{S} r_P \Delta r \Delta z + a_P^0 T_P^0 .$$

Chapitre 5

Méthode des volumes finis appliquée aux problèmes de convection-diffusion

5.1 Introduction

Les problèmes, de convection-diffusion, apparaissent dans le cas des écoulements des fluides. Le problème est de trouver le champ de température en présence d'un champ de vitesse et de densité doné. Le terme de diffusion est utilisé ici dans un sens généralisé. Le flux de diffusion généré par le gradient de la variable générale Φ est $-\Gamma\partial\Phi/\partial x$ qui peut être un flux de diffusion des espèces chimiques ou un flux thermique par exemple. Pour les problèmes où l'écoulement du fluide joue un rôle significatif il faut prendre en compte les effets de la convection. L'équation de convection-diffusion en stationnaire peut être obtenue à partir de l'équation générale de conservation (ou de transport) (2.9) en négligeant le terme transitoire :

$$div(\rho\vec{u}\Phi) = div(\Gamma grad\Phi) + S . \tag{5.1}$$

L'intégration formelle sur le volume de contrôle donne :

$$\int_A \vec{n}(\rho\Phi\vec{u})dA = \int_A \vec{n}(\Gamma grad\Phi)dA + \int_{VC} SdV . \tag{5.2}$$

L'équation (5.2) représente le bilan du flux dans un volume de contrôle. La partie gauche de l'équation représente le flux de convection net tandis que la partie droite représente le flux de diffusion net et la génération de Φ (le terme source) dans le volume de contrôle.
Le principal problème à la discrétisation du terme convectif est le calcul de la variable Φ aux interfaces du volume de contrôle et du flux convectif à travers ces interfaces (frontières). Dans le chapitre 4 on a utilisé le schéma aux différences centrales pour obtenir l'équation discrétisée pour le terme de diffusion et le terme source. Le processus de diffusion affecte la distribution d'une quantité transportée le long de ses gradients dans toutes les directions tandis que la convection a l'influence dans la direction d'écoulement seulement. Le schéma aux différences centrales ne peut pas être utilisé pour le traitement de la convection. Pour assurer ainsi la stabilité du calcul numérique, il faut chercher autres schémas de discrétisation pour le terme de convection.

Soit un champ d'écoulement qui verifie l'équation de continuité :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 . \tag{5.3}$$

L'équation différentielle générale sous la forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + S\,, \tag{5.4}$$

peut être réécrite, en tenant compte de l'équation de continuité, ainsi :

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + S\,. \tag{5.5}$$

Pour cette forme de l'équation (non conservative) on trouve que pour une distribution donnée de r, u_j, Γ, et S, une certaine solution de Φ vérifie l'équation (5.5).

5.2 L'équation de convection-diffusion 1D stationnaire

Pour montrer la façon de traiter le terme convectif on considère l'équation de convection-diffusion 1D stationnaire :

$$\frac{d}{dx}(ru\Phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right). \tag{5.6}$$

L'écoulement doit satisfaire l'équation de continuité (conservation de la masse) :

$$\frac{d}{dx}(ru) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ru = cste\,. \tag{5.7}$$

On considère aussi le volume de contrôle avec les interfaces à mi-distance des noeuds

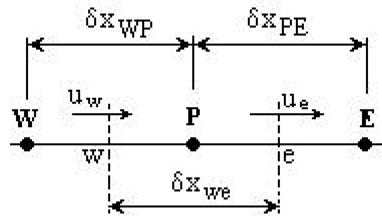


Fig. 5.1 *Volume de contrôle autour du point P*

5.2.1 Discrétisation avec le schéma centré

En intégrant, sur le volume de contrôle, l'équation (5.6) on obtient :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx}(\rho u \Phi) dV = \int_{VC} \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right) dV \quad \text{ou} \quad \int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \Phi) dx = \int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right) dx\,, \tag{5.8}$$

ce qui donne

$$(\rho u \Phi)_e - (\rho u \Phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_w\,. \tag{5.9}$$

En appliquant une intérpolation linéaire et en tenant compte que les interfaces sont à mi-distance de noeuds on trouve :

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\Phi_E + \Phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\Phi_P + \Phi_W) = \frac{\Gamma_e(\Phi_E - \Phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\Gamma_w(\Phi_P - \Phi_W)}{\delta x_w}, \qquad (5.10)$$

où $\Phi_e = \frac{1}{2}(\Phi_E + \Phi_P)$ et $\Phi_w = \frac{1}{2}(\Phi_P + \Phi_W)$.

Il est convenable de définir deux variables F et D qui représentent le flux massique convectif par l'unité de l'aire et la conductance de diffusion respectivement :

$$F = ru \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{dx}, \qquad (5.11)$$

où $F \geq 0$ si $u \geq 0$ ou $F \leq 0$ si $u \leq 0$ et $D \geq 0$.

On obtient ainsi la forme générale de l'équation discrétisée avec le schéma centré :

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E, \qquad (5.12)$$

où $a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$ $\quad a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$;

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w).$$

Remarques

1. Par l'équation de continuité on a $ru = cste$, donc $F_e = F_W$ et $a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$.
2. L'interpolation linéaire pour obtenir $\Phi_e = (\Phi_E + \Phi_P)/2$ correspond aux différences centrées des développements en serie de Taylor, donc une précision de l'ordre 2.
3. Parce que $a_W = D_w + F_w/2$ et $a_E = D_e - F_e/2$, a_E et a_W peuvent être négatifs si $|F| > 2D$. Dans ces conditions la règle N° 2 n'est pas forcément vérifiée et les résultats sont désastrueux, c'est-à-dire on ne respecte pas la physique du phénomène.

Exemples

Soit $D_e = D_w = 1$ et $F_e = F_w = 4$ alors on obtient pour les coefficients les valeurs suivantes :

$$a_E = -1 \qquad a_W = 3 \qquad a_P = 2.$$

Premier cas : Si $\Phi_E = 200$, $\Phi_W = 100$ alors on a $\Phi_P = 50$!

Deuxième cas : Si $\Phi_E = 100$, $\Phi_W = 200$ alors on a $\Phi_P = 250$!

4. Si un des $a_{vs} < 0$ (les autres coefficients étant positifs) alors on a :

$$a_P = \sum a_{vs} < \sum |a_{vs}| \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{\sum |a_{vs}|}{|a_P|}$$

Le critère de Scarborough [50] n'est pas vérifié si la relation ci-dessus existe. Dans ces conditions la méthode de Gauss-Seidel peut diverger (le schéma centré est donc limité aux petites valeurs de Re $(F/D < 2)$.

5. Si $\Gamma = 0$ alors on a :

$$D_e = D_w = 0 \quad \Rightarrow \quad a_E = -a_W \qquad a_P = 0,$$

et le système linéaire n'est pas soluble par la méthode Gauss-Seidel et également par la plupart des méthodes itératives.

Conclusion : Il faut trouver un autre schéma de discrétisation que le schéma centré.

5.2.2 Discrétisation avec le schéma "upwind" (décentré amont)

Le schéma "upwind" est construit pour éviter de dire que si la convection est forte dans une direction, l'information en un point peut venir de l'aval (comme c'est le cas avec le schéma centré).

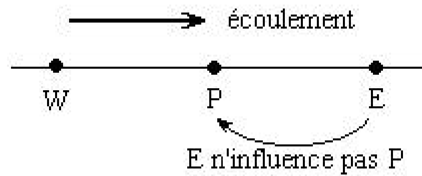


Fig. 5.2 *Explicative au schéma "upwind"*

Formulation du schéma "upwind"

La formulation pour le terme de diffusion est inchangée mais le terme de convection est calculé dans les hypothèses suivantes :

$$\Phi_e = \Phi_P \quad \text{si} \quad F_e > 0\ ; \tag{5.13}$$

$$\Phi_e = \Phi_E \quad \text{si} \quad F_e < 0\ ; \tag{5.14}$$

$$\Phi_w = \Phi_W \quad \text{si} \quad F_w > 0\ ; \tag{5.15}$$

$$\Phi_w = \Phi_P \quad \text{si} \quad F_w < 0; \tag{5.16}$$

Si l'on introduit l'opérateur suivant :

$$[A, B] = \max(A, B), \tag{5.17}$$

alors le schéma décentré s'écrit :

$$F_e\Phi_e = \Phi_P[F_e, 0] - \Phi_E[-F_e, 0] = (\rho u \Phi)_e\ ; \tag{5.18}$$

$$F_w\Phi_w = \Phi_W[F_w, 0] - \Phi_P[-F_w, 0] = (\rho u \Phi)_w. \tag{5.19}$$

En utilisant le concept décrit ci-dessus, on obtient l'équation de convection-diffusion discrétisée sous la forme suivante :

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E , \tag{5.20}$$

avec : $a_W = D_w + [F_w, 0]$;

$a_E = D_e + [-F_e, 0]$;

$a_P = D_w + [-F_w, 0] + D_e + [F_e, 0] = a_W + a_E + F_e - F_w$.

Remarques

1. Les coefficients a_P et a_{vs} ne sont jamais négatifs ;
2. Les solutions sont toujours physiquement acceptables ;
3. Le critère de Scarborough, [50], est vérifié.

5.2.3 Solution exacte du problème de convection-diffusion 1D stationnaire

L'équation (5.6) peut être résolue de façon exacte si le coefficient Γ est supposé constant (ru est aussi constant conformement à l'équation de continuité (5.7)). Dans ces conditions l'équation à résoudre est :

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \frac{ru}{\Gamma}\frac{d\Phi}{dx} = 0 . \tag{5.21}$$

Si l'on utilise le domaine $0 \le x \le L$ avec les conditions aux limites :

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{en} \quad x = 0 \; ; \tag{5.22}$$

$$\Phi = \Phi_L \quad \text{en} \quad x = L \; ; \tag{5.22a}$$

La solution analytique de l'équation (5.21) est la suivante :

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \frac{\exp(Px / L) - 1}{\exp(P) - 1} , \tag{5.23}$$

où P est le nombre de Péclet (il représente le rapport entre les forces de convection et de diffusion) défini par la relation :

$$P = \frac{ruL}{\Gamma} = \frac{F}{D} \tag{5.24}$$

Remarques

1. Si $P = 0$ (il n'y a pas de la convection) on a la diffusion pure et on obtient un profil linéaire.

pour $\Phi(x)$.

2. Si $P >> 1$ on a l'influence prépondérante de Φ_0.
3. Si $P << -1$ on a l'influence prépondérante de Φ_L (valeurs négatives de P).

4. Le schéma centré donne $\Phi_{L/2} \equiv \Phi_e = (\Phi_0 + \Phi_L)/2$, ce qui est exacte pour $P = 0$ et acceptable pour les petites valeurs de $|P|$.
5. Le schéma décentré, c'est-à-dire,

$$\Phi_e = \Phi_{L/2} = \Phi_0 \quad \text{si} \quad P > 0$$
$$\Phi_e = \Phi_{L/2} = \Phi_L \quad \text{si} \quad P < 0$$

est exacte pour $|P|$ très grand et inexacte si $|P|$ est petit.

6. Lorsque P est grand, $(d\Phi / dx)_{x=L/2} \approx 0$, donc la diffusion est nulle. Or, dans le schéma "upwind", on calcule le terme de diffusion à partir d'un profil linéaire de Φ entre 0 et L, c'est-à-dire qu'aux grands nombres de Péclet, on surestime la diffusion (ce qui s'appelle *"diffusion numérique"*).

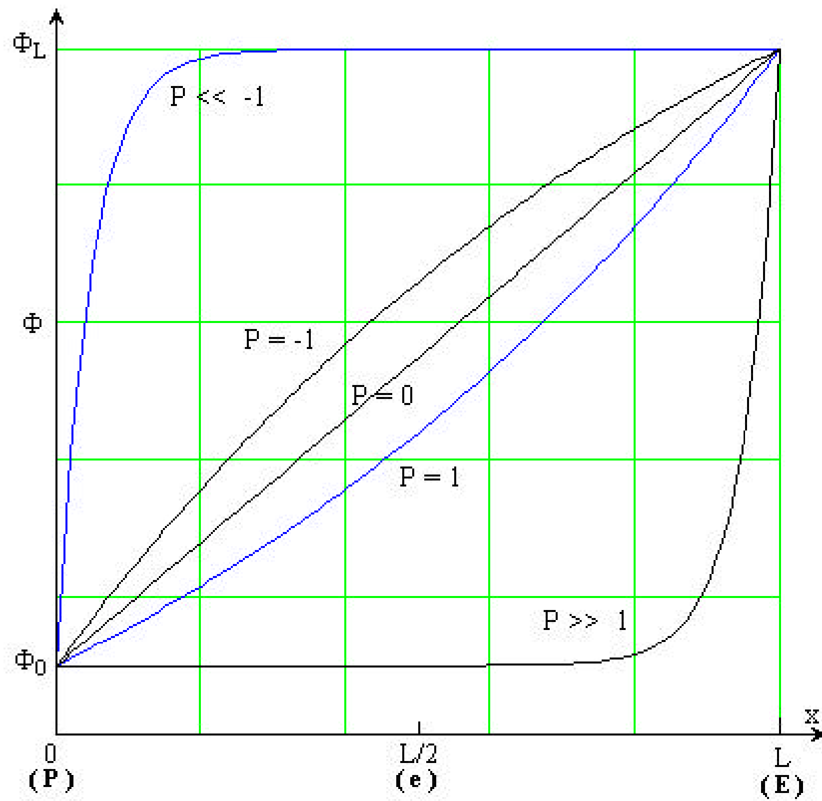


Fig. 5.3 *Solution exacte pour le problème de convection/diffusion 1D stationnaire*

5.2.4 Le schéma exponentiel

L'équation (5.6) peut être réécrite ainsi :

$$\frac{d}{dx}\left(\rho u\Phi - \Gamma\frac{d\Phi}{dx}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dJ}{dx} = 0, \tag{5.25}$$

avec $J = \rho u\Phi - \Gamma\dfrac{d\Phi}{dx}$.

La forme discrétisée de l'équation (5.25) s'écrit :

$$J_e - J_w = 0. \quad (5.26)$$

Pour calculer les flux J_e et J_w on se sert de la solution exacte entre P et E pour J_e, et aussi entre W et P pour J_w

$$J_e = (\rho u)_e \Phi_e - \Gamma_e \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_e, \quad (5.27)$$

avec $\Phi(x) = \Phi_P + (\Phi_E - \Phi_P) \dfrac{\exp\left(\dfrac{P_e x}{\delta x_e} \right) - 1}{\exp(P_e) - 1}$ et $P_e = \dfrac{F_e}{D_e} = \dfrac{(\rho u)_e \delta x_e}{\Gamma_e}$,

$$J_w = (\rho u)_w \Phi_w - \Gamma_w \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_w, \quad (5.28)$$

avec $\Phi(x) = \Phi_P + (\Phi_W - \Phi_P) \dfrac{\exp\left(\dfrac{P_w x}{\delta x_w} \right) - 1}{\exp(P_w) - 1}$ et $P_w = \dfrac{F_w}{D_w} = \dfrac{(\rho u)_w \delta x_w}{\Gamma_w}$.

On trouve finalement les flux aux points e et w :

$$J_e = F_e \left(\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right); \quad (5.29)$$

$$J_w = F_w \left(\Phi_W + \frac{\Phi_W - \Phi_P}{\exp(P_w) - 1} \right). \quad (5.30)$$

Remarque: Les flux J_e et J_w ne dépendent pas de la position des interfaces e et w respectivement.

En remplaçant les expressions (5.29) et (5.30) dans l'équation discrétisée (5.26) on obtient la forme générale habituelle de l'équation discrétisée :

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E, \quad (5.31)$$

avec $a_W = \dfrac{F_w \exp\left(\dfrac{F_w}{D_w} \right)}{\exp\left(\dfrac{F_w}{D_w} \right) - 1}$ $a_E = \dfrac{F_e}{\exp\left(\dfrac{F_e}{D_e} \right) - 1}$ $a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$.

Remarques

1. Pour un problème stationnaire 1D ce schéma permet d'obtenir la solution exacte pour n'importe quelle valeur du nombre Péclet et n'importe quelle valeur du nombre de noeuds.

2. Cependant, ce schéma est assez peu utilisé car :
   - les exponentielles coûtent cher à calculer numériquement ;
   - le schéma exponentiel n'est pas exact pour les problèmes 2D, 3D, instationnaires et avec le terme source.

5.2.5 Le schéma hybride

Ce schéma a qualitativement le comportement du schéma exponentiel mais coûte moins cher. Dans le schéma exponentiel l'on a :

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{D_e}\right) - 1} . \tag{5.32}$$

Si l'on remplace $F_e = P_e D_e$ on obtient la forme suivante de l'équation (5.32) :

$$\frac{a_E}{D_E} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} . \tag{5.33}$$

A la figure 5.4 on représente la variation du rapport a_E / D_E en fonction du nombre Péclet et on constate que :

a) Si $P_e > 0$, c'est à dire le point E du maillage est en aval de P, l'influence de E baise quand la valeur de P_e augmente. À la limite quand $P_e \to \infty$ alors le rapport $a_E / D_E \to 0$;
b) Si $P_e < 0$, c'est-à-dire le point E du maillage est en amont de P, l'influence de E augmente quand $|P_e|$ augmente. À la limite quand $P_e \to -\infty$, le rapport $a_E / D_E \to -P_e$;
c) Si $P_e = 0$, la tangente à la courbe de la solution exacte est $a_E / D_e = 1 - P_e / 2$.

Conclusions

a) Le schéma hybride est une combinaison de ces trois tangentes (voir la figure 5.4) ainsi :
1. Pour $P_e < -2$,

$$\frac{a_E}{D_e} = -P_e \tag{5.34}$$

2. Pour $-2 \leq P_e \leq 2$,

$$\frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2} \tag{5.35}$$

3. Pour $P_e > 2$,

$$\frac{a_E}{D_e} = 0 \tag{5.36}$$

Sous une forme compacte le schéma hybride (les relations (5.34), (5.35) et (5.36)) peut s'écrire :

$$a_E = D_e\left[-P_e, 1-\frac{P_e}{2}, 0\right] = \left[-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right]. \tag{5.37}$$

b) Le schéma hybride est identique au schéma centré pour $-2 \le P_e \le 2$:

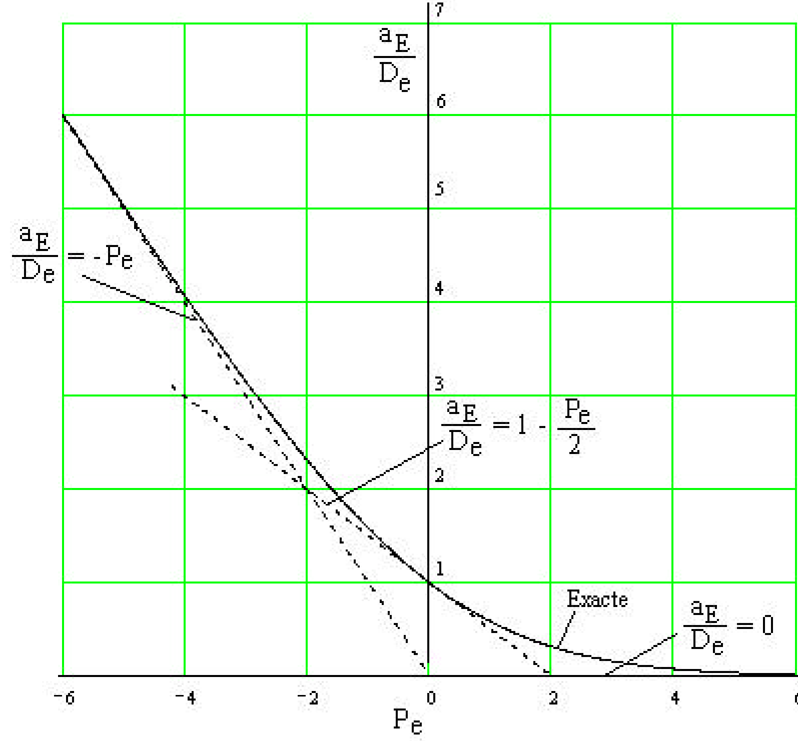


Fig. 5.4 *Variation du coefficient a_E en fonction du nombre Péclet*

c) Le schéma hybride est identique au schéma *"upwind"* pour $|P_e| > 2$, mais avec $D_e = 0$ c'est à dire qu'on ne surestime plus la diffusion ;

d) Le schéma hybride est une combinaison améliorée entre le schéma centré et le schéma *"upwind"*.

L'équation de convection-diffusion stationnaire 1D s'écrit :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E, \tag{5.38}$$

où :

$$a_W = \left[F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right] \qquad a_E = \left[-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right] \qquad a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

.

5.2.6 Le schéma "Power Law" (Loi Puissance)

On constate sur la figure 5.4 que l'écart entre la solution exacte (ou schéma exponentiel) et le schéma hybride est maximal à $|P_e| = 2$. D'autre part il est exagéré de

considérer la diffusion nulle pour $|P_e| > 2$. Le schéma *"Power Law"* réalise une meilleure approximation de la courbe exacte (exponentielle) et de plus ne coûte pas cher comparé à l'exponentiel.

Pour le schéma *"Power Law"* les coefficients a_E sont définis ainsi :

Pour $P_e < -10$,

$$\frac{a_E}{D_e} = -P_e \tag{5.39}$$

Pour $-10 \leq P_e < 0$,

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1P_e)^5 - P_e \tag{5.40}$$

Pour $0 \leq P_e \leq 10$,

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 - 0.1P_e)^5 \tag{5.41}$$

Pour $P_e > 10$,

$$\frac{a_E}{D_e} = 0\,. \tag{5.42}$$

Sous la forme compacte les coefficients peuvent être écrits ainsi :

$$a_E = D_e\left[0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e}\right)^5\right] + [0, -F_E]\,. \tag{5.43}$$

Remarques

1. Pour $|P_e > 10|$, le schéma *"Power Law"* est identique au schéma hybride ;
2. Les schémas *"Power Law"* et exponentiel sont tellement proches qu'ils ne peuvent pas être comparés graphiquement ;
3. Le schéma *"Power Law"* est recommandé pour les probèmes de convection-diffusion.

5.2.7 Récapitulatif des différents schémas

L'équation discrétisée sous la forme générale est :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E\,, \tag{5.44}$$

où $a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$.

Les coefficients a_E et a_W, selon le schéma utilisé, sont présentés dans le tableau 5.1

Tableau 5.1 Les coefficients a_E et a_W pour différents schémas

Schéma	a_E	a_W
Centré	$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$
“Upwind”	$a_E = D_e + [- F_e , 0]$	$a_W = D_w + [F_w , 0]$
Exponentiel	$a_E = \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1}$	$a_W = \frac{F_w \exp(P_w)}{\exp(P_w) - 1}$
Hybride	$a_E = \left[- F_e , D_e - \frac{F_e}{2} , 0\right]$	$a_W = \left[F_{we} , D_w + \frac{F_w}{2} , 0\right]$
“Power Law”	$a_E = D_e\left[0, \left(1 - \frac{0.1\|F_e\|}{D_e}\right)^5\right] + [0, - F_E$	$a_W = D_w\left[0, \left(1 - \frac{0.1\|F_w\|}{D_w}\right)^5\right] + [0, F_w]$

Remarques

1. Le schéma centré est valable pour $|P| \leq 2$;
2. Le schéma “upwind” est non approprié pour les faibles valeurs de $|P|$ et la diffusion est surestimée ;
3. Le schéma exponentiel a un coût (au point de vue numérique) élevé ;
4. Le schéma hybride est acceptable mais ceci donne une erreur maximale pour $|P| \approx 2$;
5. Le schéma “Power Law” est recommandé.

5.2.8 Formulation générale des différents schémas

On considère le maillage de la figure 5.5. Le flux total à travers l’interface entre les deux points i et $i+1$ peut être écrit, en tenant compte de la relation (5.23), ainsi, en définissant :

$$J^* = \frac{J\delta x}{\Gamma} = \frac{\rho u \Phi \delta x}{\Gamma} - \frac{d\Phi}{d(x / \delta x)} = P\Phi - \frac{d\Phi}{d(x / \delta x)}, \tag{5.45}$$

où P est le nombre de Péclet, $rudx / \Gamma$.

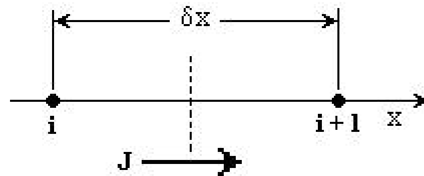


Fig. 5. 5 *Le flux total entre deux points du maillage*

Si l’on considère que le flux à l’interface est une moyenne pondérée entre Φ_i et Φ_{i+1},

$$\Phi_{\text{int}\,erf} = \alpha\Phi_i + (1-\alpha)\Phi_{i+1}, \tag{5.46}$$

et le gradient de Φ est proportionnel à $(\Phi_{i+1} - \Phi_i)$,

$$\frac{d\Phi}{d(x/\delta x)} = \beta(\Phi_{i+1} - \Phi_i) \tag{5.47}$$

alors le flux total peut être écrit ainsi :

$$J^* = P(\alpha\Phi_i + (1-\alpha)\Phi_{i+1}) - \beta(\Phi_{i+1} - \Phi_i) = (P\alpha + \beta)\Phi_i - (P(\alpha-1) + \beta)\Phi_{i+1} \tag{5.48}$$

Le flux total J^* peut être écrit sous la forme générale :

$$J^* = B\Phi_i - A\Phi_{i+1}, \tag{5.49}$$

où $A = (a-1)P + b$ et $B = aP + b$ sont des coefficients sans dimension en fonction de P.

Propriétés de A et B

1. Si $\Phi_i = \Phi_{i+1}$, de la relation (5.47), on peut tirer la conclusion que le flux de diffusion est nul, et donc :

$$J^* = P\Phi = P\Phi_i = P\Phi_{i+1}. \tag{5.50}$$

À partir de la relation (6.46) on obtient :

$$J^* = (B-A)\Phi_i = (B-A)\Phi_{i+1}. \tag{5.51}$$

En combinant les relations (5.50) et (5.51) on obtient :

$$B = A + P. \tag{5.52}$$

2. Si P devient $-P$, alors A et B changent de rôle, c'est à dire :

$$A(-P) = B(P) \quad \text{ou} \quad B(-P) = A(P). \tag{5.53}$$

Les conséquences des propriétés

Le schéma exponentiel donne (voir la relation (5.29)) :

$$J_e = F_e\left(\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_E}{\exp(P_e) - 1}\right) = \left(\frac{F_e \exp(P_e)}{\exp(P_e) - 1}\right)\Phi_P - \left(\frac{P_e}{\exp(P_e) - 1}\right)\Phi_E \quad . \tag{5.54}$$

Le flux total J^* est donc :

$$J_e^* = \frac{J_e dx_e}{\Gamma} = \underbrace{\left(\frac{P_e \exp(P_e)}{\exp(P_e)-1}\right)}_{B(P_e)}\Phi_P - \underbrace{\left(\frac{P_e}{\exp(P_e)-1}\right)}_{A(P_e)}\Phi_E \tag{5.55}$$

À la figure 5.6 sont représentées les variations exactes de $A(P)$ et $B(P)$.

Les fonctions $A(P)$ et $B(P)$ sont connues pour $-\infty < P < \infty$ dès que $A(P)$ est connue pour $P \geq 0$. En effet pour $P < 0$ on a :

$$\begin{aligned} A(P) &= B(P) - P \\ &= A(-P) - P \\ &= A(|P|) - P \end{aligned} \tag{5.56}$$

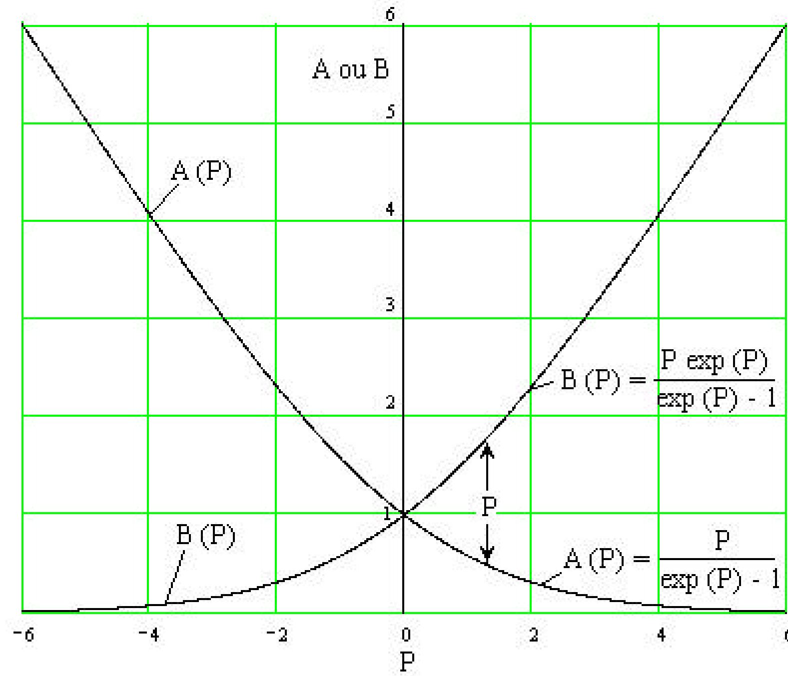


Fig. 5.6 *Variation de A et B en fonction du nombrwe de Péclet*

Pour toutes les valeurs de P, c'est-à-dire $\forall P \in (-\infty, \infty)$ on peut écrire :

$$A(P) = A(|P|) + [-P, 0] \;; \tag{5.57}$$

$$B(P) = A(|P|) + [P, 0]. \tag{5.58}$$

En tenant compte que

$$J^* = J\frac{\delta x}{\Gamma} = \frac{J}{D}, \tag{5.59}$$

l'équation de convection-diffusion 1D stationnaire discrétisée (5.26) devient :

$$D_e J_e^* - D_w J_w^* = 0 \tag{5.60}$$

En tenant compte de la relation (5.49), l'équation (5.60) devient :

$$D_e\left(B_e\Phi_P - A_e\Phi_E\right) - D_w\left(B_w\Phi_W - A_w\Phi_P\right) = 0 . \tag{5.61}$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\left(D_e B_e + D_w B_w\right)\Phi_P = \left(D_e A_e\right)\Phi_E + \left(D_w A_w\right)\Phi_W , \tag{5.62}$$

ou

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E . \tag{5.63}$$

Les coefficients de l'équation (5.63), en tenant compte de relations (5.57) et (5.58), sont les suivants :

$$a_W = D_w A\left(\left|P_w\right|\right) + \left[F_w ,0\right] \qquad a_E = D_e A\left(\left|P_e\right|\right) + \left[- F_e ,0\right] ; \tag{5.64}$$

$$a_P = a_E + a_W + \left(F_e - F_w\right). \tag{5.65}$$

Tous les schémas peuvent donc s'écrire sous la forme unique (5.63) avec les coefficients (5.64) et (5.65) où les coefficients $A\left(\left|P\right|\right)$, pour les différents schémas, sont obtenus par identification entre les relations ci-dessus et les relations du tableau 5.1. Ces coefficients sont présentés au tableau 5.2.

Tableau 5.2

Schéma	**Formule pour** $A\left(\left|P\right|\right)$
Centré	$1 - 0.5\left|P\right|$
"Upwind"	1
Hybride	$\left[0,1 - 0.5\left|P\right|\right]$
"Power Law"	$\left[0, \left(1 - 0.1\left|P\right|\right)^5\right]$
Exponentiel (exacte)	$\dfrac{\left|P\right|}{\exp\left(\left|P\right|\right) - 1}$

À la figure 5.7 on presente la fonction $A\left(\left|P\right|\right)$ pour différents schémas.

Remarques

1. Tous les schémas, sauf le schéma centré pour $|P| > 2$, donnent une solution physiquement acceptable ;
2. Puisque le nombre de Péclet décide sur le comportement des schémas, on pourrait prendre un maillage fin (dx petit) afin d'avoir $|P| < 2$ et pouvoir ainsi choisir le schéma centré. Cependant pour la plupart des problèmes physiques cela nécessiterait un nombre élevé de volumes de contrôle et donc des coûts de calcul très élevés.

5.2.9 Schémas aux différences d'ordre supérieur pour les problèmes de convection-diffusion

Les erreurs peuvent encore être minimisées en utilisant des schémas d'ordre supérieur pour la discrétisation. Les schémas d'ordre supérieur impliquent l'utilisation de plusieurs points voisins. Le schéma aux différences centrales qui est de deuxième ordre en précision peut être instable parce qu'il ne tient pas compte de la direction de l'écoulement. Les schémas d'ordre supérieur doivent conserver la propriété du schéma "Upwind" et la sensibilité à la direction d'écoulement pour assurer la stabilité.

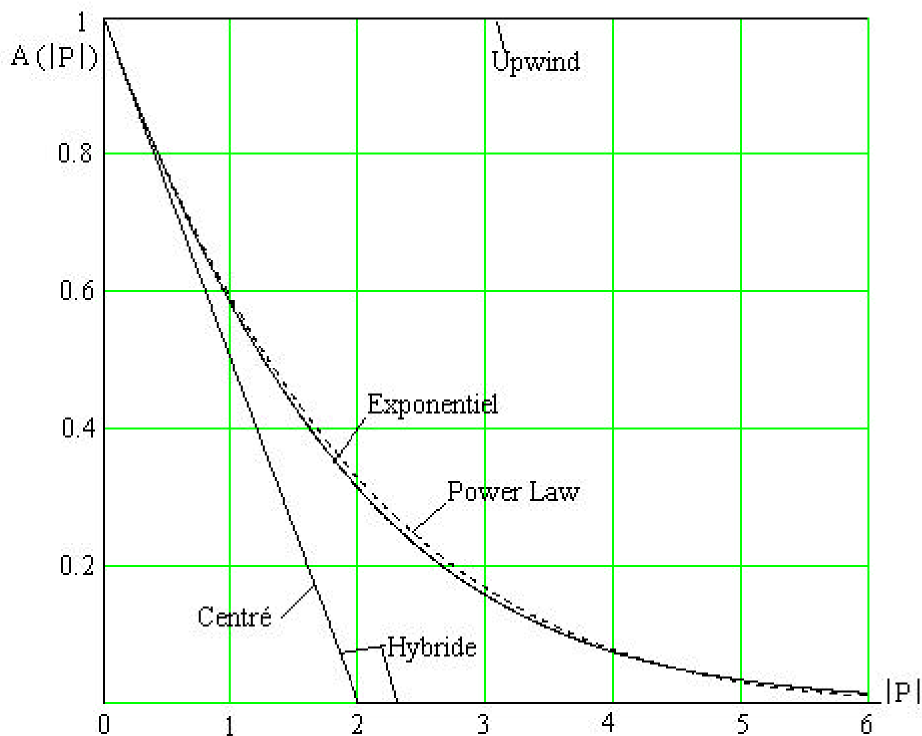


Fig. 5.7 *La fonction $A(|P|)$ pour différents schémas*

Schéma QUICK

Ce schéma utilise une interpolation quadratique pondérée des trois points pour calculer la valeur de la grandeur cherchée à l'interface du volume de contrôle. La valeur de Φ à l'interface est obtenue à l'aide d'une fonction quadratique qui passe par deux noeuds du maillage et un noeud situé en amont de l'interface (fig. 5.8).

Par exemple, quand $u_w > 0$ et $u_e > 0$ un profil quadratique qui passe par les points WW, W et P est utilisé pour calculer Φ_w et un autre profil quadratique qui passe par W, P et E est utilisé pour calculer Φ_e.

Pour $u_w < 0$ et $u_e < 0$ les valeurs de Φ aux points W, P et E sont utilisées pour calculer Φ_w tandis que les valeurs aux points P, E et EE pour calculer Φ_e. On peut montrer que, pour un maillage uniforme (voir l'Annexe A), la valeur de Φ à l'interface située entre deux noeuds voisins i et $i-1$ est donnée par la formule suivante :

$$\Phi_{\text{int}\,erface} = \frac{6}{8}\Phi_{i-1} + \frac{3}{8}\Phi_i - \frac{1}{8}\Phi_{i-2}. \tag{5.66}$$

Quand $u_w > 0$, les noeuds voisins pour l'interface 'w' sont W et P tandis que *le noeud amont* est le noeud WW (fig.5.8). La valeur de Φ à l'interface est :

$$\Phi_w = \frac{6}{8}\Phi_W + \frac{3}{8}\Phi_P - \frac{1}{8}\Phi_{WW}. \tag{5.67}$$

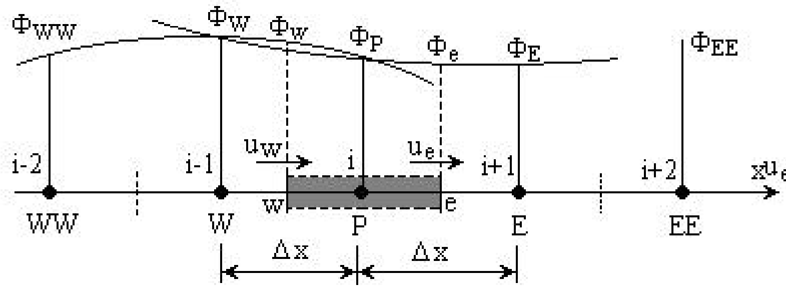


Fig. 5.8 *Le profil quadratique utilisé au schéma QUICK*

Quand $u_e > 0$, les noeuds voisins pour l'interface 'e' sont P et E tandis que *le noeud amont* est le noeud W (fig.5.8). La valeur de Φ à l'interface est :

$$\Phi_e = \frac{6}{8}\Phi_P + \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{1}{8}\Phi_W. \tag{5.68}$$

Il est important de noter que pour les termes de diffusion on obtient les mêmes expressions, dans l'équation discrétisée, que pour le schéma aux différences centrales. Si on considère l'équation de convection-diffusion 1D stationnaire discrétisée sous la forme :

$$F_e\Phi_e - F_w\Phi_w = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W). \tag{5.69}$$

Si $F_w > 0$ et $F_e > 0$ et si on utilise les formules (5.67) et (5.68) pour les termes de convection et les différences centrales pour les termes de diffusion, l'équation (5.69) s'écrit :

$$F_e\left(\frac{6}{8}\Phi_P + \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{1}{8}\Phi_W\right) - F_w\left(\frac{6}{8}\Phi_W + \frac{3}{8}\Phi_P - \frac{1}{8}\Phi_{WW}\right) = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W). \tag{5.70}$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\left(D_w - \frac{3}{8}F_w + D_e + \frac{6}{8}F_e\right)\Phi_P = \left(D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e\right)\Phi_W + \left(D_e - \frac{3}{8}F_e\right)\Phi_E - \frac{1}{8}F_w\Phi_{WW} \,. \quad (5.71)$$

Sous la forme générale l'équation s'écrit ainsi :

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + a_{WW}\Phi_{WW} \,, \quad (5.72)$$

où $\quad a_W = D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e \qquad a_E = D_e - \frac{3}{8}F_e \qquad a_{WW} = -\frac{1}{8}F_w$;

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + (F_e - F_w) \,.$$

Dans le cas où $F_w < 0$ et $F_e < 0$ les valeurs de Φ aux interfaces $'w'$ et $'e'$ sont données par les expressions :

$$\Phi_w = \frac{6}{8}\Phi_P + \frac{3}{8}\Phi_W - \frac{1}{8}\Phi_E \,; \quad (5.73)$$

$$\Phi_e = \frac{6}{8}\Phi_E + \frac{3}{8}\Phi_P - \frac{1}{8}\Phi_{EE} \,. \quad (5.74)$$

La substitution des expressions (5.73) et (5.74) dans les termes de convection dans l'équation discrétisée (5.69) et l'utilisation des différences centrales pour les termes de diffusion, on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + a_{EE}\Phi_{EE} \,, \quad (5.75)$$

où $\quad a_W = D_W + \frac{3}{8}F_w \qquad a_E = D_e - \frac{6}{8}F_e - \frac{1}{8}F_w \qquad a_{EE} = \frac{1}{8}F_e$;

$$a_P = a_W + a_E + a_{EE} + (F_e - F_w) \,.$$

On peut obtenir des expressions générales, qui sont valables tant pour la direction d'écoulement positive que pour la direction négative, par la combinaison des équations (5.72) et (5.75) ainsi :

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + a_{WW}\Phi_{WW} + a_{EE}\Phi_{EE} \,, \quad (5.76)$$

avec le coefficient central :

[redacted],

et les coefficients voisins :

[redacted] ;

,

où : ;

.

5.2.10 Exemples

Exemple 5.1

Une propriété Φ (par exemple la température) est transportée par convection et diffusion à travers le domaine unidimensionnel schématisé à la figure 5.9. Les conditions aux limites sont les suivantes :

$\Phi_0 = 1$ à $x = 0$;
$\Phi_L = 0$ à $x = L$.

En utilisant un maillage à 6 noeuds et le schéma centré (différences centrales), calculer la distribution de Φ en fonction de x pour :

1) **Cas 1 :** $u = 0.1\,\text{m/s}$ et comparer avec la solution analytique ;
2) **Cas 2 :** $u = 2.5\,\text{m/s}$ et comparer avec la solution analytique ;
3) **Cas 3 :** Recalculer la solution numérique pour $u = 2.5\,\text{m/s}$ en utilisant 21 noeuds et comparer avec la solution analytique.

On connaît : $L = 1\,\text{m}$, $\rho = 1\,\text{kg/m}^3$, $\Gamma = 0.1\,\text{kg/m} \cdot \text{s}$.
La solution analytique est :

$$\Phi = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0)\frac{\exp(\rho ux/\Gamma) - 1}{\exp(\rho uL/\Gamma) - 1}.$$

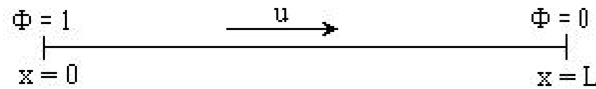


Fig. 5.9 *Le domaine de calcul.*

Solution

On utilise le maillage présenté à la figure 5.10 qui donne $dx = 0.2\,\text{m}$. On rappel que $F = ru$, $D = \Gamma / dx$, $F_e = F_w = F$, $D_e = D_w = D$.

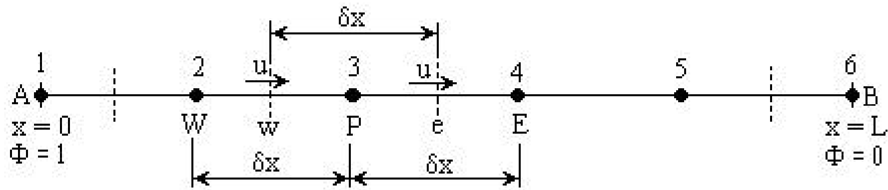


Fig. 5.10 *Le maillage utilisé pour l'exemple 5.1.*

L'équation qui gouverne le transport de la propriété Φ est :

$$\frac{d}{dx}(r\, u\Phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right) \tag{5.77}$$

Pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) l'équation discrétisée peut être écrite sous la forme suivante :

$$-a_W\Phi_W + a_P\Phi_P - a_E\Phi_E = 0 \; ; \tag{5.78}$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \qquad a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \qquad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w).$$

Pour les noeuds voisins aux noeuds de frontières (les noeuds 2 et 5) ce n'est pas nécessaire d'écrire une équation discrétisée supplémentaire. On utilise la même équation que pour un noeud intérieur, mais comme les valeurs de la propriété Φ sont connues aux points 1 et 6 ($\Phi_1 \equiv \Phi_A = 1$, $\Phi_6 \equiv \Phi_B = 0$) les termes qui les contiennent passent comme des termes sources. Ainsi, *pour le noeud 2* l'équation discrétisée est :

$$a_P\Phi_P - a_E\Phi_E = a_W\Phi_A. \tag{5.79}$$

Pour le noeud 5 l'équation discrétisée devient :

$$-a_W\Phi_W + a_P\Phi_P = a_E\Phi_B. \tag{5.80}$$

<u>Cas 1</u>

$$F = ru = 1.0 \cdot 0.1 = 0.1 \; ; \; D = \Gamma / dx = 0.1/0.2 = 0.5 \; ;$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = 0.5 + \frac{0.1}{2} = 0.55 \qquad a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = 0.5 - \frac{0.1}{2} = 0.45;$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) = 0.55 + 0.45 + (0.1 - 0.1) = 1.0 .$$

Les équations à résoudre sont les suivantes :

Noeud 2 : $+1.0\Phi_2 - 0.45\Phi_3 = 0.55\Phi_A$

Noeud 3 : $-0.55\Phi_2 + 1.0\Phi_3 - 0.45\Phi_4 = 0$

Noeud 4 : $-0.55\Phi_3 + 1.0\Phi_4 - 0.45\Phi_5 = 0$

Noeud 5 : $-0.55\Phi_4 + 1.0\Phi_5 = 0.45\Phi_B$

La forme matricielle du système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 1.0 & -0.45 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.81}$$

La solution du système (5.81) est :

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.871 \\ 0.714 \\ 0.522 \\ 0.287 \end{bmatrix} \tag{5.82}$$

À la figure 5.11 on présente la comparaison entre la solution numérique et la solution analytique.

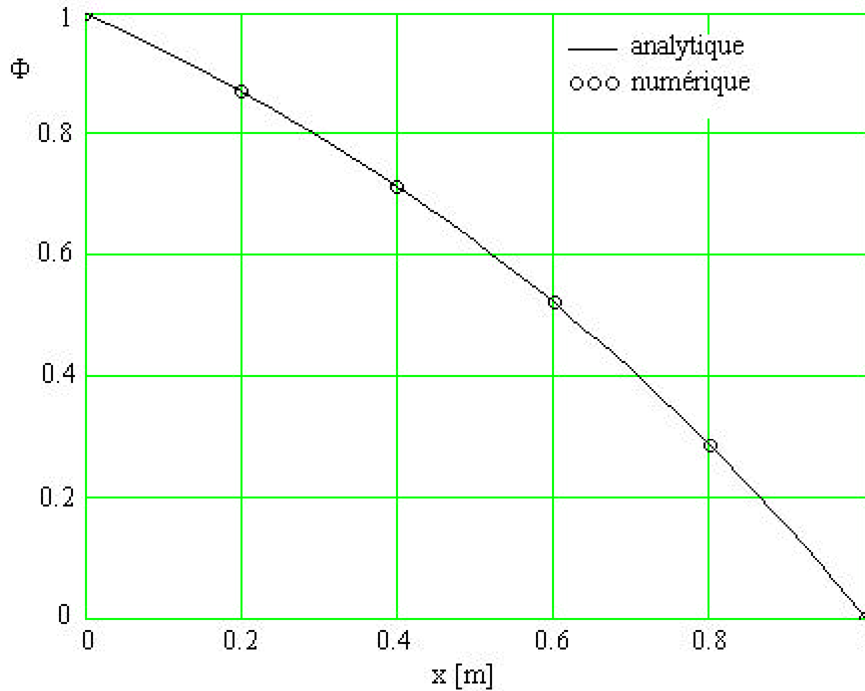


Fig. 5.11 *Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique pour le problème de convection/diffusion (cas 1).*

On constate une très bonne correspondance entre la solution numérique et la solution analytique.

<u>Cas 2</u>

$u = 2.5\,\text{m/s}$; $F = ru = 1.0 \cdot 2.5 = 2.5$; $D = \Gamma / dx = 0.1/0.2 = 0.5$;

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = 0.5 + \frac{2.5}{2} = 1.75 \qquad a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = 0.5 - \frac{2.5}{2} = -0.75 \;;$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) = 1.75 - 0.75 + (2.5 - 2.5) = 1.0\,.$$

Les équations à résoudre sont les suivantes :

Noeud 2 : $1.0\Phi_2 + 0.75\Phi_3 = 1.75\Phi_A$

Noeud 3 : $-1.75\Phi_2 + 1.0\Phi_3 + 0.75\Phi_4 = 0$

Noeud 4 : $-1.75\Phi_3 + 1.0\Phi_4 + 0.75\Phi_5 = 0$

Noeud 5 : $-1.75\Phi_4 + 1.0\Phi_5 = -0.75\Phi_B$

La forme matricielle du système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.75 & 0 & 0 \\ -1.75 & 1.0 & 0.75 & 0 \\ 0 & -1.75 & 1.0 & 0.75 \\ 0 & 0 & -1.75 & 1.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.83}$$

La solution du système (5.83) est :

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.952 \\ 1.063 \\ 0.805 \\ 1.408 \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

À la figure 5.12 on représente, pour comparaison, les solutions analytique et numérique. On constate un comportement d'instabilité de la solution numérique pour le schéma aux différences centrales.

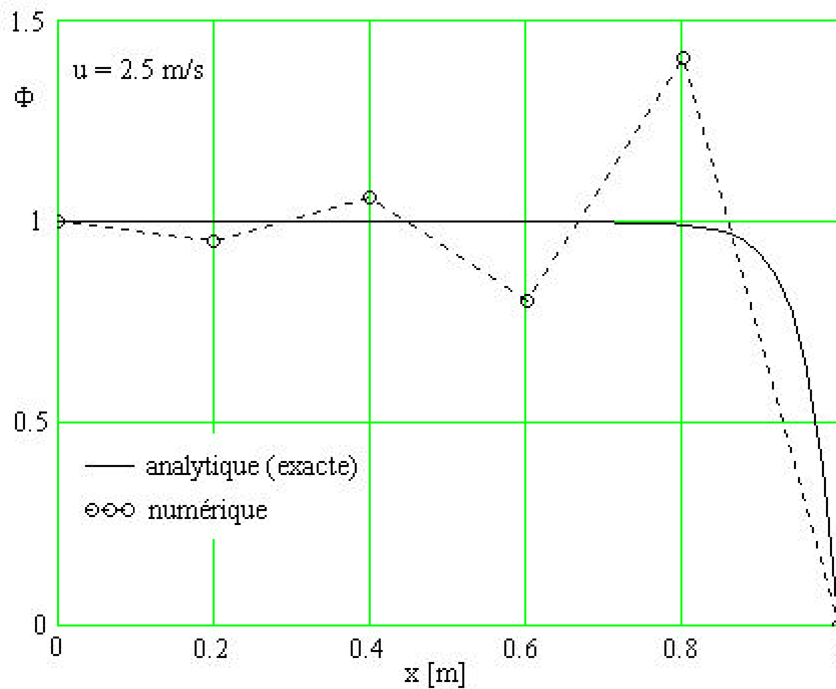


Fig. 5.12 *Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique pour le problème de convection/diffusion (cas 2).*

Cas 3

$$u = 2.5\,\text{m/s} \;;\; F = \rho u = 1.0 \cdot 2.5 = 2.5 \;;\; D = \Gamma / \delta x = 0.1 / 0.05 = 2.0 \;;$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = 2.0 + \frac{2.5}{2} = 3.25 \qquad a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = 2.0 - \frac{2.5}{2} = 0.75 \;;$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) = 3.25 + 0.75 + (2.5 - 2.5) = 4.0\,.$$

Les équations à résoudre sont les suivantes :

Noeud 2 : $4.0\Phi_2 - 0.75\Phi_3 = 3.25\Phi_A$

Noeud 3-19 : $-3.25\Phi_{i-1} + 4.0\Phi_i - 0.75\Phi_{i+1} = 0 \qquad i = 3 \div 19$

Noeud 20 : $-3.25\Phi_{19} + 4.0\Phi_{20} = 0.75\Phi_B$

À la figure 5.13 on présente les solutions numériques et analytiques.

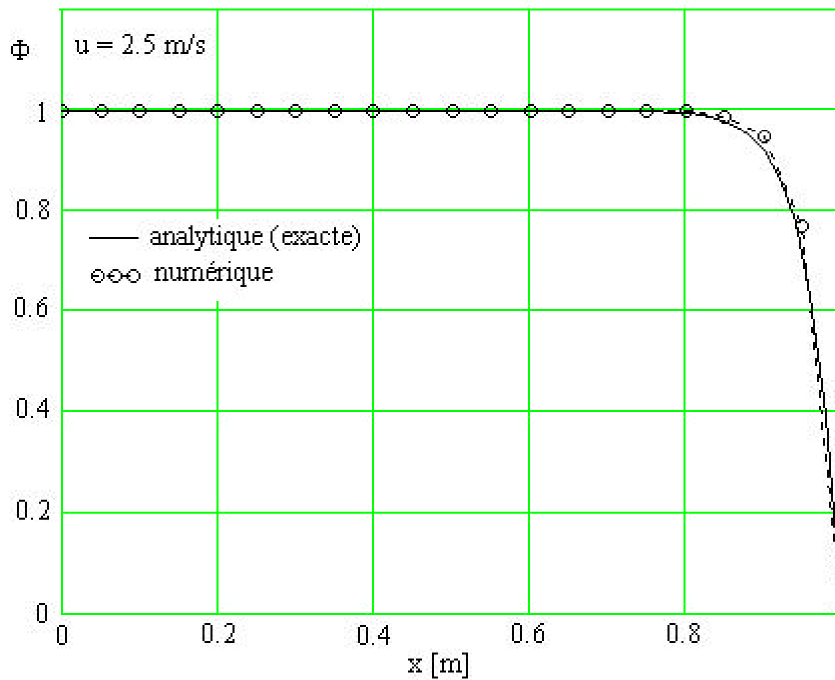


***Fig. 5.13** Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique (exacte) pour le problème de convection/diffusion (cas 3).*

On constate une bonne concordance entre la solution numérique et la solution analytique cette fois (cas 3). La comparaison des résultats des cas 2 et 3 montre qu'un maillage plus fin (cas 3) a déterminé la réduction du nombre de Péclet (le rapport F / D) de 5 à 1.25. Le schéma aux différences centrales fournis de bons résultats quand le rapport F / D est petit.

Exemple 5.2

Résoudre le problème considéré à l'exemple 1 en utilisant le schéma de discrétisation "upwind" pour les cas :

1) $u = 0.1\,\text{m/s}$;
2) $u = 2.5\,\text{m/s}$,
et pour le même maillage (à six noeuds). Comparer les résultats avec la solution analytique.

Solution

Pour un noeud intérieur (les noeuds 3 et 4) l'équation discrétisée (5.20) peut être écrite sous la forme :

$$-a_W\Phi_W + a_P\Phi_P - a_E\Phi_E = 0, \tag{5.85}$$

où : $a_W = D_w + [F_w, 0]$ $\quad a_E = D_e + [-F_e, 0]$;

$$a_P = a_W + a_E + F_e - F_w.$$

Pour les noeuds 2 et 5 sont valables les équations (5.79) et (5.80).

Cas 1

$u = 0.1\,\text{m/s}$; $F = ru = 1.0 \cdot 0.1 = 0.1$; $D = \Gamma / dx = 0.1/0.2 = 0.5$; $P = F/D = 0.1/0.5 = 0.2$;

$a_W = 0.5 + \max(0.1,0) = 0.6$; $a_E = 0.5 + \max(-0.1,0) = 0.5$; $a_P = 0.6 + 0.5 + 0.1 - 0.1 = 1.1$.

Le système d'équations à résoudre est :

Noeud 2 : $\quad 1.1\Phi_2 - 0.5\Phi_3 = 0.6\Phi_A$
Noeud 3 : $\quad -0.6\Phi_2 + 1.1\Phi_3 - 0.5\Phi_4 = 0$
Noeud 4 : $\quad -0.6\Phi_3 + 1.1\Phi_4 - 0.5\Phi_5 = 0$
Noeud 5 : $\quad -0.6\Phi_4 + 1.1\Phi_5 = 0.5\Phi_B$

La forme matricielle du système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 1.1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.6 & 1.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.6 & 1.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.86}$$

La solution du système ci-dessus est :

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.704 \\ 0.511 \\ 0.279 \end{bmatrix} \tag{5.87}$$

Dans le tableau 5.3 on présente pour comparaison les résultats numériques et analytiques et les erreurs.

Tableau 5.3

Noeud	*Distance*	*Numérique*	*Analytique*	*Erreur [%]*
2	0.2	0.866	0.871	0.57
3	0.4	0.704	0.714	1.4
4	0.6	0.511	0.522	2.1
5	0.8	0.279	0.287	2.78

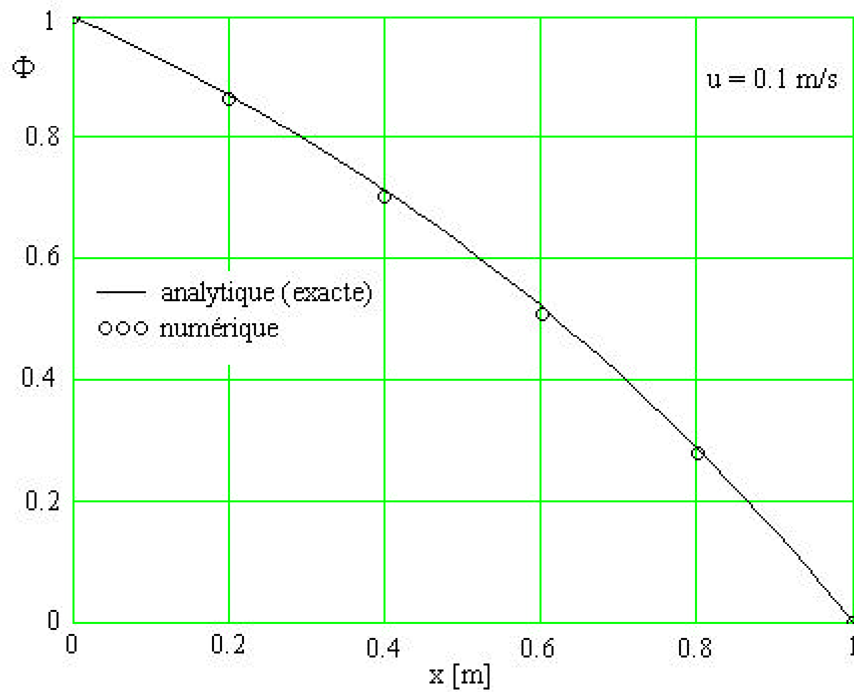


Fig. 5.14 *Comparaison entre la solution numérique (schéma "upwind") et la solution analytique (exacte) pour le problème de convection/diffusion 1D stationnaire (cas 1).*

Cas 2

$u = 2.5\,\text{m/s}$; $F = ru = 1.0 \cdot 2.5 = 2.5$; $D = \Gamma / dx = 0.1/0.2 = 0.5$; $P = F/D = 2.5/0.5 = 5$;

$a_W = 0.5 + \max(2.5,0) = 3.0$; $a_E = 0.5 + \max(-2.5,0) = 0.5$; $a_P = 3.0 + 0.5 + 2.5 - 2.5 = 3.5$.

Le système d'équations à résoudre est :

Noeud 2 : $3.5\Phi_2 - 0.5\Phi_3 = 3.0\Phi_A$

Noeud 3 : $-3.0\Phi_2 + 3.5\Phi_3 - 0.5\Phi_4 = 0$

Noeud 4 : $-3.0\Phi_3 + 3.5\Phi_4 - 0.5\Phi_5 = 0$

Noeud 5 : $-3.0\Phi_4 + 3.5\Phi_5 = 0.5\Phi_B$

La forme matricielle du système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 3.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 3.0 & 3.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & -3.0 & 3.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -3.0 & 3.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution du système (5.88) est :

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 0.995 \\ 0.972 \\ 0.833 \end{bmatrix} \tag{5.89}$$

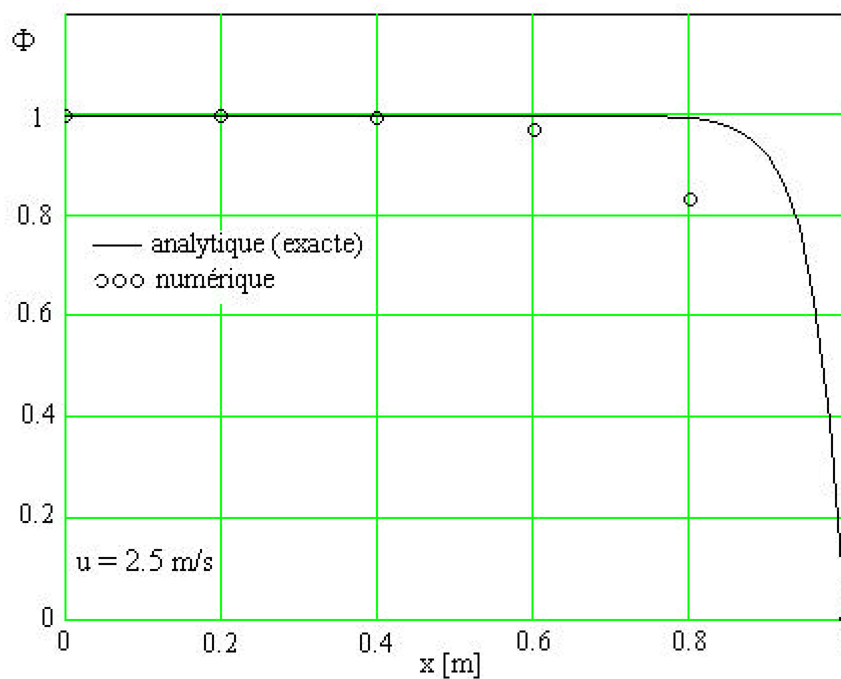


Fig. 5.15 *Comparaison entre la solution numérique (schéma "upwind") et la solution analytique pour un problème de convection/diffusion 1D stationnaire (cas 2).*

Tableau 5.4

Noeud	***Distance***	***Numérique***	***Analytique***	***Erreur [%]***
2	0.2	0.999	0.999	0.00
3	0.4	0.995	0.999	0.40
4	0.6	0.972	0.999	2.70
5	0.8	0.833	0.993	16.11

Les résultats numériques sont présentés à la figure 5.15 et dans le tableau 5.4 en comparaison avec la solution analytique.

Remarque

On constate qu'avec le même maillage (six noeuds) le schéma "upwind" donne une solution réaliste par rapport au schéma aux différences centrales même si dans le cas du schéma "upwind" l'erreur est assez grande vers la frontière du domaine de calcul.

Exemple 5.3

Résoudre le problème considéré au Cas 2 de l'exemple 5.1 en utilisant le schéma hybride pour $u = 2.5\,\text{m/s}$. Comparer la solution d'un maillage à 6 noeuds avec la solution d'un maillage à 21 noeuds.

Solution

$u = 2.5\,\text{m/s}$; $F = F_e = F_w = \rho u = 1.0 \cdot 2.5 = 2.5$;

$D = D_e = D_w = \Gamma / \delta x = 0.1 / 0.2 = 0.5$;

$P = P_e = P_w = \rho u \delta x / \Gamma = 1.0 \cdot 2.5 \cdot 0.2 / 0.1 = 5$;

$$a_W = \max\left(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right) = \max\left(2.5, 0.5 + \frac{2.5}{2}, 0\right) = 2.5 \text{ ;}$$

$$a_E = \max\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right) = \max\left(-2.5, 0.5 - \frac{2.5}{2}, 0\right) = 0 \text{ ;}$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) = 2.5 + 0 + (2.5 - 2.5) = 2.5 .$$

Le système d'équations à résoudre, dans ce cas, est :

Noeud 2 : $2.5\Phi_2 - 0.0\Phi_3 = 2.5\Phi_A$

Noeud 3 : $-2.5\Phi_2 + 2.5\Phi_3 - 0.0\Phi_4 = 0$

Noeud 4 : $-2.5\Phi_3 + 2.5\Phi_4 - 0.0\Phi_5 = 0$

Noeud 5 : $-2.5\Phi_4 + 2.5\Phi_5 = 0.0\Phi_B$

La forme matricielle du système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 2.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.90}$$

La solution du système (5.90) est :

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.999 \end{bmatrix} \tag{5.91}$$

Les résultats numériques pour un maillage à 21 noeuds sont présentés au tableau 5.5 et à la figure 5.16. On constate que même si le nombre de Péclet est grand (supérieur à 2) les erreurs sont presque les mêmes que dans le cas du schéma “upwind”. Si le maillage devient plus fin, le nombre de Péclet devient inférieur à 2, le schéma hybride se transforme en schéma aux différences centrales et la solution est assez précise.

Tableau 5.5

Noeud	*Distance*	*Numérique*	*Analytique*	*Erreur [%]*
2	0.2	1.0	0.999	-0.1
3	0.4	1.0	0.999	-0.1
4	0.6	1.0	0.999	-0.1
5	0.8	0.997	0.993	-0.4

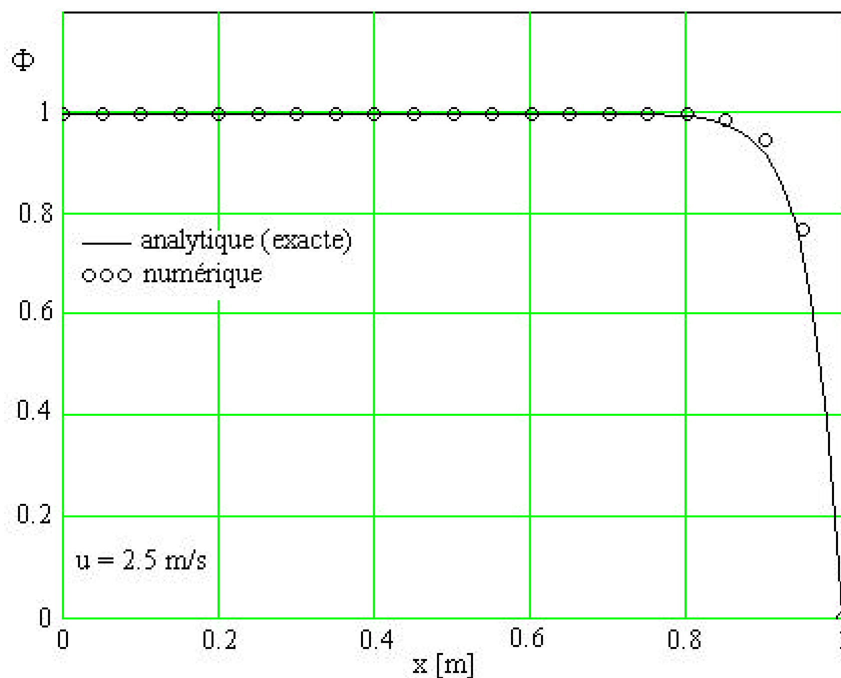


Fig. 5.16 *Comparaison entre la solution numérique (schéma Hybride) et la solution analytique pour un problème de convection/diffusion 1D stationnaire.*

5.2.11 Propriétés des schémas de discrétisation

Jusqu’à présent on a présenté une substitution mécanique des dérivées par des expressions discrètes sans faire aucun type de considération additionnelle. Mais avant d’admettre la représentativité de la solution par un schéma aux différences, il faut d’abord s’assurer que le schéma représente correctement l’équation d’origine, ensuite, on doit être certains que les erreurs , même très petites, ne s’amplifient pas, et finalement, on doit vérifier que la solution calculée représente correctement la solution du problème.

Une bonne compréhension de la solution d'un algorithme numérique est cruciale. Il y a trois concepts mathématiques [8] utilisés dans la caractérisation des algorithmes numériques: *la consistance, la stabilité et la convergence.*

La consistance

Soit une équation aux dérivées partielles que l'on note symboliquement par :

$$L(u) = g \quad \text{dans} \quad \Omega \ ; \qquad (5.92)$$
$$B(u) = h \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

où u indique la variable dépendante, Ω le domaine et Γ sa frontière. Les formes discrètes de ces relations, c'est-à-dire celles que l'on obtient en remplaçant les dérivées par des approximations, seront notées :

$$L(U) = g \quad \text{dans} \quad \Omega \ ; \qquad (5.93)$$
$$B(U) = h \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Définition

On appelle erreur de troncature l'expression :

$$E_T = L(U) - L(u). \qquad (5.94)$$

Il s'agit de l'erreur systématique qui est introduite chaque fois qu'on approche un opérateur continu par un opérateur discret.

Définition

Un schéma numérique est dit **consistant** *avec une équation aux dérivées partielles, si l'erreur de troncature E_T tend vers zéro lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers zéro.* L'idée de consistance, on peut la concevoir comme une sorte de *fidélité locale* entre l'équation discrète et l'équation aux dérivées partielles. Si l'on n'approche pas correctement le problème continu, on n'aura aucune chance d'obtenir la convergence du schéma. Finalement, la *qualité* de la consistance n'est autre que la précision du schéma.

La stabilité

La consistance est une *garantie locale* entre la discrétisation et l'équation aux dérivées partielles. Mais peut-on considérer que le dernier pas $(n-1) \to n$ se fait dans les mêmes conditions que le premier pas $1 \to 2$?. La différence est évidente car à la dernièrre étape on trouve l'accumulation des erreurs de discrétisation des pas précédents. Cette réalité exige une condition *globale* visant qu'à la longue, la solution numérique reste près de la solution exacte.Autrement dit, pour qu'une solution ait un sens, il est primordial que les erreurs de calcul inévitables ne s'amplifient pas. Ceci mène à la notion de *stabilité.*

Définition

Un schéma est stable si la solution du problème discret reste bornée.

Trois remarques s'imposent à cette définition :

- La stabilité est un concept qui s'applique sur les schémas numériques et pas sur les équations continues.
- Il s'agit d'une définition qui s'apparente à la notion de stabilité en mécanique.
- Elle n'impose aucune restriction aux oscillations.

La convergence

Malgré les notions de consistance et de stabilité, il n'y a rien qui garantit la représentativité ultime de la solution. Cette caractéristique est donnée par la définition de convergence.

Définition

Un schéma est convergent si la différence $u-U$ entre la solution exacte u et la solution numérique U tend vers zéro quand les pas de discrétisation tendent vers zéro.

Évidemment, la quantité $u-U$ n'est pas calculable, cependant le théorème suivant nous permet de sortir de l'impasse.

Théorème de Lax

Pour un problème linéaire, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence.

On insiste sur le fait que même si un schéma convergent est stable et consistant, le contraire n'est pas garanti. Cependant, le théorème fondamental de Lax assure que *stabilité et consistance impliquent la convergence.* Dans les problèmes non-linéaires la consistance et la stabilité sont des conditions nécessaires pour la convergence, mais elles ne sont pas suffisantes. Pour tels problèmes Patankar [50] a formulé certaines règles (présentées déjà au chapitre 4) qui font les schémas de calcul par la méthode des volumes finis, des schémas de calcul robustes. Les méthodes robustes sont caractérisées par trois propriétés cruciales : la propriété d'être *conservative*, la propriété d'être *bornée* et la propriété d'être *transportée.*

La propriété d'être conservative

Après l'intégration de l'équation de convection-diffusion sur un nombre fini de volumes de contrôle on obtient un système d'équation discrétisée qui implique les flux de la propriété de transport Φ à travers les interfaces des volumes de contrôle. Pour assurer la conservation de Φ sur tout le domaine, le flux de Φ qui sort par une certaine interface doit être égal avec le flux de Φ qui entre par la même interface du volume de contrôle voisin. Le flux à travers une interface commune doit être représenté de façon consistante, c'est-à-dire par la même expression sur deux volumes de contrôle voisins. Par exemple, on prend le problème de diffusion stationnaire 1D sans le terme-source (fig. 5.17).

Les flux aux frontières du domaine sont notés q_A et q_B. On considère cinq noeuds et les volumes de contrôle attachés et on applique le schéma aux différences centrales pour calculer le flux de diffusion à travers les interfaces. Le flux qui entre à travers l'interface "w" du volume de contrôle autour du noeud 3 est $\Gamma_{w3}(\Phi_3-\Phi_2)/\delta x$ et le flux qui sort à travers l'interface "e" du même volume de contrôle est $\Gamma_{e3}(\Phi_4-\Phi_3)/\delta x$. Le bilan global du flux peut être obtenu en additionnant le flux net (la différence entre le flux sortant et le flux entrant) de tous les volumes de contrôle et en prenant en compte les conditions aux frontières du domaine, ansi :

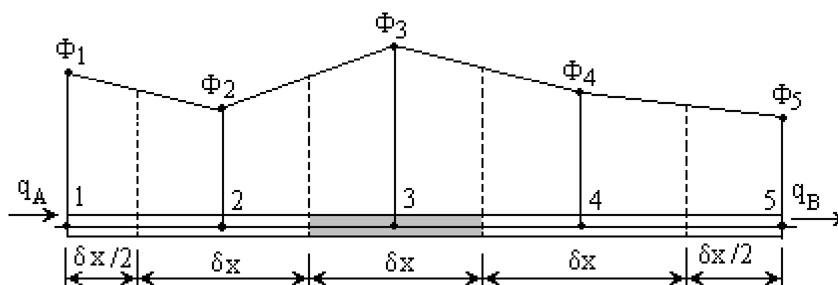


Fig. 5.17 *Exemple de spécification consistante des flux de diffusion.*

$$\left(\Gamma_{e1}\frac{\Phi_2-\Phi_1}{dx}-q_A\right)+\left(\Gamma_{e2}\frac{\Phi_3-\Phi_2}{dx}-\Gamma_{w2}\frac{\Phi_2-\Phi_1}{dx}\right)+\left(\Gamma_{e3}\frac{\Phi_4-\Phi_3}{dx}-\Gamma_{w3}\frac{\Phi_3-\Phi_2}{dx}\right)+$$
$$\left(\Gamma_{e4}\frac{\Phi_5-\Phi_4}{dx}-\Gamma_{w4}\frac{\Phi_4-\Phi_3}{dx}\right)+\left(q_B-\Gamma_{w5}\frac{\Phi_5-\Phi_4}{dx}\right)=q_B-q_A \tag{5.95}$$

Si on tient compte que $\Gamma_{e1}=\Gamma_{w2}$, $\Gamma_{e2}=\Gamma_{w3}$, $\Gamma_{e3}=\Gamma_{w4}$, $\Gamma_{e4}=\Gamma_{w5}$, on constate que les flux de diffusion sont exprimés de façon consistante parce que seulement les flux des frontières restent dans le bilan global du domaine. Cette formulation, aux différences centrales, assure la conservation du flux de diffusion de Φ sur tout le domaine de calcul.

L'utilisation inconsistante des formules d'interpolation peut générer un schéma qui n'assure pas la conservation de la variable dépendante Φ sur tout le domaine de calcul. Par exemple, on considère la situation dans laquelle on utilise une fonction quadratique 1 par les valeurs aux noeuds 1, 2 et 3 pour le volume de contrôle 2 et une autre fonction quadratique 2 par les valeurs aux points 2, 3 et 4 pour le volume de contrôle 3 (fig. 5.18).

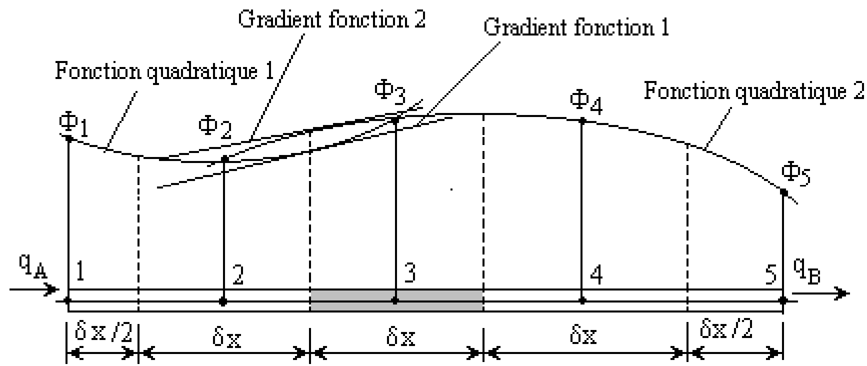


Fig. 5.18 *Exemple de spécification inconsistante des flux de diffusion.*

Les valeurs des flux calculées à l'interface "e" du volume de contrôle 2 et à l'interface "w" du volume de contrôle 3 peuvent être différentes si les gradients des deux fonctions, dans le point de cette interface, sont différents. Dans ces conditions la conservation globale du flux n'est pas satisfaite. Cet exemple ne suggère pas que l'intérpolation quadratique soit mauvaise. On va montrer plus loin qu'une interpolation quadratique appelée schéma QUICK est consistante.

La propriété d'être borné

Les équations discrétisées pour chaque noeud du maillage représentent un système d'équations qui doit être résolu. Normalement, un tel système est résolu en utilisant les techniques itératives. La procédure itérative commence par une distribution initiale arbitraire de la variable Φ et puis la solution initiale est actualisée après chaque itération jusqu'à l'obtention de la convergence. Scarborough (1958) [50] a montré qu'une condition suffisante de convergence pour une méthode itérative peut être exprimée en fonction des valeurs des coefficients des équations discrétisées :

$$\frac{\sum|a_{vs}|}{|a'_P|}=\begin{cases}\le 1 & \text{pour tous les noeuds}\\ <1 & \text{pour au moins un noeud}\end{cases}, \tag{5.96}$$

où $a_P^{'}$ est le coefficient effectif du noeud central P (plus précisément, $a_P - S_P$). Si le schéma de discrétisation produit des coefficients qui satisfont le critère de Scarborough, la matrice des coefficients est dominante de type diagonale. Pour cela il est nécessaire d'avoir de grandes valeurs pour le coefficient effectif $(a_P - S_P)$. On constate donc, que la linéarisation du terme-source avec S_P négatif assure une grande valeur pour $a_P^{'}$ parce que $-S_P$ est positif. La dominance de type diagonale est une garantie pour satisfaire la propriété d'être bornée de la variable Φ.

Pour le problème de conduction thermique stationnaire 1D, sans terme source (l'exemple 1 du paragraphe 4.1.7) les conditions aux limites, c'est-à-dire la température aux frontières est de $500\ ^oC$ et $100\ ^oC$ respectivement. Toutes les valeurs de la température des noeuds intérieurs sont inférieures à $500\ ^oC$ et supérieures à $100\ ^oC$. Une autre exigence pour que la variable Φ soit bornée est d'avoir tous les coefficients du système d'équations discrétisées du même signe (la règle n° 2). Physiquement, ceci implique qu'une augmentation de la valeur de Φ dans un noeud va déterminer une augmentation de la valeur de Φ dans tous les noeuds voisins. Si le schéma de discrétisation ne satisfait pas l'exigence pour Φ "d'être bornée", il est possible que la solution ne converge pas pour tous les noeuds, et si elle converge on peut avoir "des pics" dans la solution (voir la fig.5.12). Ce phénomène est bien illustré par les résultats du Cas 2 de l'exemple 5.1.(tous les coefficients a_E sont négatifs, voir aussi la matrice des coefficients du système (5.83)).

La propriété d'être transportée

La propriétée d'être transportée de la variable Φ lors de l'écoulement peut être illustrée en considèrant une source constante de Φ dans le point P (fig. 5.19).

On définit un coefficient sans unité de mesure comme étant le rapport entre les forces de convection et de diffusion :

$$P = \frac{F}{D} = \frac{ru}{\Gamma / dx}. \tag{5.97}$$

À la figure 5.19 sont présentées les formes générales des iso-lignes de Φ pour différentes valeurs du nombre de Péclet. On considère deux cas extrêmes pour pouvoir identifier l'étendue de l'influence du noeud situé en amont, P, sur le noeud situé en avant, E :

- il n'y a pas de convection, donc diffusion pure ($P = 0$) ;
- il n'y a pas de diffusion, donc convection pure ($P \to \infty$).

Dans le cas de la diffusion pure, le fluide ne s'écoule pas ($P = 0$) et les iso-valeurs de Φ sont des cercles concentriques ayant le centre des cercles au point P. Les processus de diffusion tendent de propager Φ egalement dans toutes les directions. Les conditions au point E seront influencées tant de que se passe au point P que de qui se passe en aval du point E. Avec l'augmentation du nombre de Péclet la forme des contours des iso-valeurs se modifie à partir de la forme circulaire jusqu'à la forme elliptique. Ces formes sont déformées dans la direction de l'écoulement. Les conditions au point E seront fortement influencées par les conditions du point P tandis que les conditions au point P seront faiblement influencées ou absolument pas par les conditions du point E. Dans le cas d'une convection pure ($P \to \infty$) les contours de Φ constante seront fortement déplacés dans la direction de l'écoulement. Toutes les propriétés du terme-source de Φ du point P seront transportées très vite au point E. S'il n'y a pas de diffusion, Φ_E est egale à Φ_P.

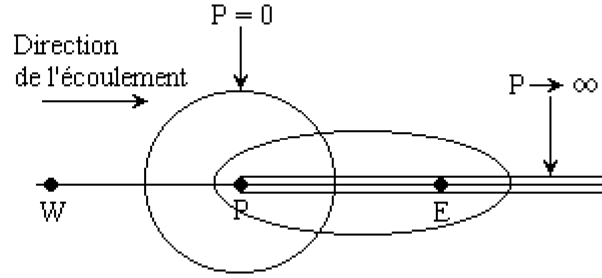


Fig. 5.19 *Distribution de Φ autour d'un source aux différentes valeurs du nombre de Péclet.*

5.2.12 Les propriétés du schéma aux différences centrales

La propriété d'être conservative

Le schéma aux différences centrales utilise des expressions consistantes pour l'évaluation du flux convectif aux interfaces du volume de contrôle. Les commentaires faits au paragraphe 5.2.10 montrent que le schéma aux différences centrales est conservatif.

La propriété d'être bornée

Les coefficients, pour les noeuds intérieurs, de l'équation discrétisée (5.12) sont

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$

L'écoulement, stationnaire unidimensionnel, satisfait aussi l'équation de continuité. Cette équation discrétisée implique la relation $F_e - F_w = 0$. Dans ces conditions, le coefficient a_P peut devenir $a_P = a_W + a_E$. On constate que les coefficients du schéma aux différences centrales satisfont le critère de Scarborough. Avec $a_E = D_e - F_e / 2$ la contribution convective au coefficient de l'interface "e" est négative; si la convection est dominante alors le coefficient a_E peut être négatif. Sachant que $F_w > 0$ et $F_e > 0$ (l'écoulement est unidirectionnel), alors pour que a_E soit positif il faut que F_e et D_e satisfassent la condition suivante :

$$\frac{F_e}{D_e} = P_e < 2 . \tag{5.98}$$

Si $P_e > 2$ le coefficient a_E sera négatif et l'une des exigences de la propriété d'être borné est violée. Dans l'exemple 5.2, le cas 2 on a $P = 5$ et donc la condition (5.65) est violée. On constate aussi la conséquence sur la solution numérique à la figure 5.15.

La propriété d'être transportée

Le schéma aux différences centrales introduit des influences vers tous les voisins du noeud P quand on calcule le flux de convection et de diffusion. Le schéma ne reconnaît pas la direction de l'écoulement.

La précision

L'erreur de troncature, pour le développement en série Taylor, dans le cas du schéma aux différences centrales est de deuxième ordre (pour plus de détails, voir l'annexe A). L'exigence pour avoir des coefficients positifs dans le cas du schéma aux différences centrales est donnée par la formule (5.65) ce qui est une garantie que le schéma sera stable et la précision sera acceptable. Il est important de signaler que le nombre de Péclet défini par la relation (5.64) est une combinaison des propriétés du fluide (r et Γ), de la propriété de l'écoulement (u) et de la propriété du maillage (le pas dx). Pour les valeurs de r et Γ données, il est possible de satisfaire la relation (5.65) si la vitesse du fluide est petite ou le pas du maillage est petit. En tenant compte de ces limitations, le schéma aux différences centrales n'est pas recommandé d'être utilisé au calcul des écoulements.

5.2.13 Les propriétés du schéma "upwind"

La propriété d'être conservative

Le schéma "upwind" utilise des expressions consistantes pour calculer le flux à travers les interfaces des volumes de contrôle.

La propriété d'être bornée

Les coefficients de l'équation discrétisée sont positifs et ainsi on satisfait l'exigence pour la variable Φ d'être borné dans le cadre du schéma "upwind". La matrice des coefficients est dominante de type diagonal et "les pics" n'existe pas dans la solution.

La propriété d'être transportée

Cette propriété est incluse dans la formulation de ce schéma.

La précision

Le schéma étant basé sur les différences régressives, la précision est de premier ordre en ce qui concerne l'erreur de troncature (voir l'annexe A). Grâce à sa simplicité, le schéma "upwind" a été appliqué au calcul de la dynamique des fluides. Le schéma peut facilement être appliqué pour les problèmes 2D et 3D en utilisant la stratégie "upwind" d'après toutes les directions. *Un majeur inconvénient du schéma est qu'elle donne des résultats avec de grands erreurs quand l'écoulement n'est pas aligné avec les lignes du maillage*. L'influence des erreurs sur la distribution de la propriété transportée est interprétée comme une *fausse diffusion (diffusion numérique)*. L'élimination de la fausse diffusion peut se faire par le raffinement du maillage mais, dans certaines situations, la méthode devient prohibitive.

5.2.14 Les propriétés du schéma hybride

Le schéma hybride exploite les propriétés favorables du schéma "upwind" et du schéma aux différences centrales. Le schéma "upwind" est utilisé là où le schéma aux différences centrales produit des grands erreurs, c'est-à-dire pour les grands valeurs du nombre de Péclet. Le schéma est totalement conservative et il est inconditionnellement borné. Le schéma satisfait l'exigence de la propriété d'être transportée par l'utilisation du schéma "upwind" aux grands valeurs du nombre de Péclet. Les algorithmes numériques basés sur ce schéma sont très stables. Le désavantage de ce schéma est qu'il est, en fonction de l'erreur de troncature du développement en série Taylor, du premier ordre seulement.

5.3 Convection-diffusion 1D instationnaire

5.3.1 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation différentielle générale dans le cas 1D instationnaire est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\Phi)+\frac{\partial}{\partial x}(ru\Phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+S\ , \tag{5.99}$$

où u est la vitesse, du fluide, dans la directions x.

Si l'on note :

$$J_x \equiv \rho u\Phi - \Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{5.100}$$

où J_x est le flux total (de convection et diffusion), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)+\frac{\partial J_x}{\partial x} = S\ . \tag{5.101}$$

On intègre l'équation (5.114) sur le volume de contrôle présenté à la figure 5.20.

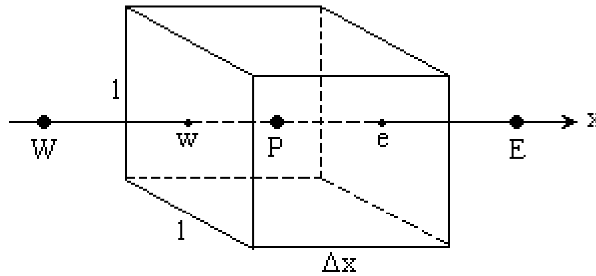


Fig. 5.20 *Volume de contrôle 1D.*

$$\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\left(\int_{x=w}^{e}\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{\partial(r\Phi)}{\partial t}dt\,dx\right)dy\,dz+\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x=w}^{e}\frac{\partial J_x}{\partial x}dx\,dt\right)dy\,dz=\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x=w}^{e}S dx\,dt\right)dy\,dz \tag{5.102}$$

L'intégration (5.102) donne :

$$\frac{\rho_P\Phi_P-\rho_P^0\Phi_P^0}{\Delta t}\Delta x\cdot 1\cdot 1+\left(J_e-J_w\right)\cdot 1\cdot 1=\left(S_c+S_P\Phi_P\right)\Delta x\cdot 1\cdot 1, \tag{5.103}$$

où

$$J_e = \int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\left(J_x\right)_e dy\,dz = \left(J_x\right)_e\cdot 1\cdot 1, \tag{5.104}$$

est le flux total dans la direction x à travers l'interface "e" de surface $(1 \cdot 1)$, et

$$J_w = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (J_x)_w dy\, dz = (J_x)_w \cdot 1 \cdot 1 \tag{5.105}$$

est le flux total dans la direction x à travers l'interface "w" de surface $(1 \cdot 1)$.

On considère également l'équation de continuité et on discrétise de la même manière :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} = 0 \qquad \text{avec} \qquad F_x = \rho u\,. \tag{5.106}$$

On intègre l'équation (5.106) sur le volume de contrôle hachuré et présenté à la figure 5.20 :

$$\int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} \left(\int_{x=w}^{e} \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, dx \right) dy\, dz + \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} \left(\int_{t}^{t+\Delta t} \int_{x=w}^{e} \frac{\partial F_x}{\partial x} dx\, dt \right) dy\, dz = 0\,, \tag{5.107}$$

et on obtient après l'intégration de l'équation (5.107) :

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t} \Delta x \cdot 1 \cdot 1 + (F_e - F_w) = 0\,, \tag{5.108}$$

où

$$F_e = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (F_x)_e dy\, dz = (\rho u)_e \cdot 1 \cdot 1\ ; \tag{5.109}$$

$$F_w = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (F_x)_w dy\, dz = (\rho u)_w \cdot 1 \cdot 1. \tag{5.110}$$

Si on soustrait la relation (5.108) multipliée par Φ_P de la relation (5.103), on obtient :

$$(\Phi_P - \Phi_P^0) \frac{\rho_P^0 \Delta x \cdot 1 \cdot 1}{\Delta t} + (J_e - F_e \Phi_P) - (J_w - F_w \Phi_P) = (S_C + S_P \Phi_P) \Delta x \cdot 1 \cdot 1 \tag{5.111}$$

On évalue le deuxième terme de la relation (5.111) de la manière suivante :

$$J_e - F_e \Phi_P = D_e J_e^* - F_e \Phi_P \qquad \text{car} \qquad J_e^* = \frac{J_e}{D_e}. \tag{5.112}$$

En tenant compte de la relation (5.49) pour J_e^*, la relation (5.112) devient :

$$J_e - F_e \Phi_P = D_e (B_e \Phi_P - A_e \Phi_E) - F_e \Phi_P\,. \tag{5.113}$$

En tenant compte de la relation (5.52), la relation (5.113) devient :

$$J_e - F_e \Phi_P = D_e ((A_e + P_e) \Phi_P - A_e \Phi_E) - F_e \Phi_P\,. \tag{5.114}$$

En tenant compte de la définition du nombre de Péclet ($P_e = F_e / D_e$) la relation (5.114) devient :

$$J_e - F_e\Phi_P = D_e A_e(\Phi_P - \Phi_E) = D_e A(P_e)(\Phi_P - \Phi_E). \tag{5.115}$$

En utilisant la relation (5.57) pour $A(P_e)$ on obtient successivement :

$$J_e - F_e\Phi_P = D_e\left(A(|P_e|) + [-P_e, 0]\right)(\Phi_P - \Phi_E)\ ; \tag{5.116}$$

$$J_e - F_e\Phi_P = \left(D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]\right)(\Phi_P - \Phi_E) = a_E(\Phi_P - \Phi_E). \tag{5.117}$$

De même, on obtient pour le troisième terme de la relation (5.111) :

$$J_w - F_w\Phi_P = \left(D_w A(|P_w|) + [F_w, 0]\right)(\Phi_W - \Phi_P) = a_W(\Phi_W - \Phi_P). \tag{5.118}$$

L'équation (5.103) s'écrit ainsi :

$$\left(\Phi_P - \Phi_P^0\right)\frac{\rho_P^0 \Delta x \cdot 1 \cdot 1}{\Delta t} + a_E(\Phi_P - \Phi_E) - a_W(\Phi_W - \Phi_P) = (S_c + S_P\Phi_P)\Delta x \cdot 1 \cdot 1. \tag{5.119}$$

En regroupant les termes dans l'équation (5.119) on obtient la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + b, \tag{5.120}$$

avec

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \qquad a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]\ ;$$

$$a_P^0 = \frac{\rho_P^0 \Delta x \cdot 1 \cdot 1}{\Delta t} \qquad b = S_c \Delta x \cdot 1 \cdot 1 + a_P^0 \Phi_P^0\ ;$$

$$a_P = a_W + a_E + a_P^0 - S_P \Delta x \cdot 1 \cdot 1,$$

où Φ_P^0 et ρ_P^0 sont des valeurs connues à l'instant t et

$$F_w = (\rho u)_w \cdot 1 \cdot 1 \qquad D_w = \frac{\Gamma_w \cdot 1 \cdot 1}{\delta x_w} \qquad P_w = \frac{F_w}{D_w}\ ;$$

$$F_e = (\rho u)_e \cdot 1 \cdot 1 \qquad D_e = \frac{\Gamma_e \cdot 1 \cdot 1}{\delta x_e} \qquad P_e = \frac{F_e}{D_e}\ ;$$

La fonction $A(|P|)$ peut être choisie dans le tableau 5.2 définit un schéma de discrétisation pour le terme convectif. Le schéma "Power Law" est recommandé dans ce cas, c'est-à-dire

$$A(P) = \left[0, (1 - 0.1|P|)^5\right]. \tag{5.121}$$

5.4 Convection-diffusion 2D et 3D stationnaire

On considère l'équation différentielle en trois dimensions sans terme-source :

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru\Phi)+\frac{\partial}{\partial y}(rv\Phi)+\frac{\partial}{\partial z}(rw\Phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right). \qquad (5.122)$$

Si l'on utilise, par exemple, le schéma hybride appliqué de la même façon que pour la direction "x" dans les autres directions "y" et "z", on obtient l'équation discrétisée qui couvre tous les cas (1D, 2D et 3D) :

$$a_P\Phi_P = a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + a_S\Phi_S + a_N\Phi_N + a_B\Phi_B + a_T\Phi_T\,, \qquad (5.123)$$

avec le coefficient du noeud central P :

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F\,.$$

Les autres coefficients sont présentés dans le tableau 5.6.

Tableau 5.6 Les coefficients de l'équation discrétisée pour le schéma hybride

Coefficient	**Écoulement 2D**	**Écoulement 3D**
a_W	$\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$	$\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$
a_E	$\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$	$\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$
a_S	$\left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2}\right), 0\right]$	$\left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2}\right), 0\right]$
a_N	$\left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2}\right), 0\right]$	$\left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2}\right), 0\right]$
a_B	-	$\left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2}\right), 0\right]$
a_T	-	$\left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2}\right), 0\right]$
ΔF	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Dans les expressions ci-dessus les valeurs de F et D sont calculées à l'aide des formules presentées au tableau ci-dessous :

Interface	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{PN}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$

Les conditions aux limites en 2D et 3D sont traitées de la même façon que dans le cas 1D (voir l'exemple 5.3 du paragraphe 5.2.10).

5.5 Convection-diffusion 2D instationnaire

5.5.1 Forme générale de l'équation discrétisée

L'équation différentielle générale dans le cas 2D instationnaire est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\Phi)+\frac{\partial}{\partial x}(ru\Phi)+\frac{\partial}{\partial y}(rv\Phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+S\,, \tag{5.124}$$

où u et v sont les composantes de la vitesse, de l'écoulement dans les directions x et y.

Si l'on note :

$$J_x \equiv \rho u\Phi - \Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\;; \tag{5.125}$$

$$J_y \equiv \rho v\Phi - \Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,, \tag{5.126}$$

où J_x et J_y sont respectivement le flux total (de convection et diffusion), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)+\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y} = S\,. \tag{5.127}$$

On intègre l'équation (5.127) sur le volume de contrôle présenté à la figure 5.22

$$\int_{z=0}^{1}\left(\int_{y=s}^{n}\int_{x=w}^{e}\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}\,dt\,dx\,dy\right)dz+\int_{z=0}^{1}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{y=s}^{n}\int_{x=w}^{e}\frac{\partial J_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dt\right)dz+$$

$$\int_{z=0}^{1}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x=w}^{e}\int_{y=s}^{n}\frac{\partial J_y}{\partial y}\,dy\,dx\,dt\right)dz=\int_{z=0}^{1}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{y=s}^{n}\int_{x=w}^{e}S\,dx\,dy\,dt\right)dz \tag{5.128}$$

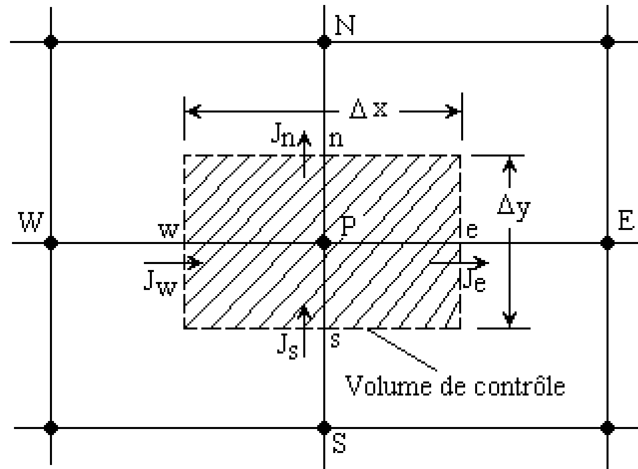


Fig. 5.21 *Volume de contrôle dans le cas 2D.*

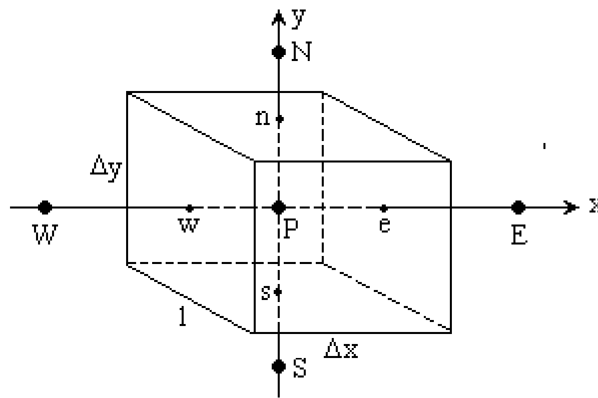


Fig. 5.22 *Volume de contrôle 2D.*

L'intégration (5.128) donne :

$$\frac{\rho_P \Phi_P - \rho_P^0 \Phi_P^0}{\Delta t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1 + \left(J_e - J_w\right) + \left(J_n - J_s\right) = \left(S_c + S_P \Phi_P\right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot 1, \qquad (5.129)$$

où

$$J_e = \left(J_x\right)_e \Delta y \cdot 1 \qquad J_w = \left(J_x\right)_w \Delta y \cdot 1\ ;$$

$$J_n = \left(J_y\right)_n \Delta x \cdot 1 \qquad J_s = \left(J_y\right)_s \Delta x \cdot 1.$$

On considère, comme dans le cas 1D, l'équation de continuité pour un problème 2D :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0 \quad \text{avec} \quad F_x = \rho u \ \text{ et } \ F_y = \rho v. \qquad (5.130)$$

On intègre l'équation (5.130) sur le volume de contrôle :

$$\int_{z=0}^{1}\left(\int_{y=s}^{n}\int_{x=w}^{e}\int_{t}^{t+\Delta t}\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt\,dx\,dy\right)dz+\int_{z=0}^{1}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{y=s}^{n}\int_{x=w}^{e}\frac{\partial F_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dt\right)dz+\int_{z=0}^{1}\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x=w}^{e}\int_{y=s}^{n}\frac{\partial F_y}{\partial y}\,dy\,dx\,dt\right)dz=0 \quad . \tag{5.131}$$

L'intégration (5.131) donne :

$$\frac{\rho_P-\rho_P^0}{\Delta t}\Delta x\cdot\Delta y\cdot 1+\left(F_e-F_w\right)+\left(F_n-F_s\right)=0\,, \tag{5.132}$$

où : $F_e=(\rho u)_e\Delta y\cdot 1 \qquad F_w=(\rho u)_w\Delta y\cdot 1$;

$F_n=(\rho v)_n\Delta x\cdot 1 \qquad F_s=(\rho v)_s\Delta x\cdot 1.$

En soustrayant la relation (5.132) multipliée par Φ_P de la relation (5.129), on obtient :

$$\left(\Phi_P-\Phi_P^0\right)\frac{\rho_P^0\Delta x\Delta y\cdot 1}{\Delta t}+\left(J_e-F_e\Phi_P\right)-\left(J_w-F_w\Phi_P\right)+\left(J_n-F_n\Phi_P\right)-\left(J_s-F_s\Phi_P\right)=\left(S_c+S_P\Phi_P\right)\Delta x\Delta y\cdot 1 \quad . \tag{5.133}$$

Comme dans le cas 1D, on montre qu'on a :

$J_e-F_e\Phi_P=a_E\left(\Phi_P-\Phi_E\right)$ avec $a_E=D_eA\left(\left|P_e\right|\right)+\left[-F_e,0\right]$;

$J_w-F_w\Phi_P=a_W\left(\Phi_W-\Phi_P\right)$ avec $a_W=D_wA\left(\left|P_w\right|\right)+\left[F_w,0\right]$;

$J_n-F_n\Phi_P=a_N\left(\Phi_P-\Phi_N\right)$ avec $a_N=D_nA\left(\left|P_n\right|\right)+\left[-F_n,0\right]$;

$J_s-F_s\Phi_P=a_S\left(\Phi_S-\Phi_P\right)$ avec $a_S=D_sA\left(\left|P_s\right|\right)+\left[F_s,0\right]$.

On obtient, finalement, la forme générale de l'équation discrétisée :

$$a_P\Phi_P=a_W\Phi_W+a_E\Phi_E+a_S\Phi_S+a_N\Phi_N+b\,, \tag{5.134}$$

avec

$a_E=D_eA\left(\left|P_e\right|\right)+\left[-F_e,0\right] \qquad a_W=D_wA\left(\left|P_w\right|\right)+\left[F_w,0\right]$;

$a_N=D_nA\left(\left|P_n\right|\right)+\left[-F_n,0\right] \qquad a_S=D_sA\left(\left|P_s\right|\right)+\left[F_s,0\right]$;

$a_P^0=\dfrac{\rho_P^0\Delta x\Delta y\cdot 1}{\Delta t} \qquad b=S_c\Delta x\Delta y\cdot 1+a_P^0\Phi_P^0$;

$a_P=a_W+a_E+a_S+a_N+a_P^0-S_P\Delta x\Delta y\cdot 1.$

où :

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \cdot 1 \qquad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y \cdot 1}{\delta x_w} \qquad P_w = \frac{F_w}{D_w} \;;$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \cdot 1 \qquad D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y \cdot 1}{\delta x_e} \qquad P_e = \frac{F_e}{D_e} \;;$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x \cdot 1 \qquad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x \cdot 1}{\delta y_n} \qquad P_n = \frac{F_n}{D_n} \;;$$

$$F_s = (\rho v)_s \Delta x \cdot 1 \qquad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x \cdot 1}{\delta y_s} \qquad P_s = \frac{F_s}{D_s} \;.$$

La fonction $A(|P|)$, qui peut être choisie dans le tableau 5.2, définit un schéma de discrétisation pour le terme convectif.

Chapitre 6

Méthode des volumes finis appliquée au traitement du couplage vitesse-pression

6.1 Introduction

La convection d'une variable scalaire Φ dépend tant de la valeur que de la direction du champ local de vitesses. Les développements du chapitre précédent ont été faits dans l'hypothèse que le champ de vitesses est connu. En général, le champ de vitesses n'est pas connu et il doit être une partie de la solution globale des variables de l'écoulement.

On considère les équations de conservation de la quantité de mouvement en 2D stationnaires. Le champ de vitesses doit satisfaire aussi l'équation de continuité

L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u . \tag{6.1}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction y :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v . \tag{6.2}$$

L'équation de continuité (de conservation de la masse) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) = 0 . \tag{6.3}$$

Les termes représentant les gradients de pression dans les directions x et y ont été écrits séparement pour faciliter les discussions qui suivent. La résolution du système (6.1-6.3) présente deux nouvelles difficultés:

• *première difficulté* – la non-linéarité du terme convectif dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, par exemple le premier terme dans l'équation (6.1), ρu^2 ;

• *deuxième difficulté* – dans le terme source, le champ de pression n'est pas connu et il n'existe pas d'équation gouvernante pour le champ de pression p .

La pression est indirectement spécifiée par l'équation de continuité. Le champ de pression correct est le champ qui, lorsqu'il est introduit dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, a un champ de vitesses associé, qui satisfait l'équation de continuité.

Toutes les trois équations sont couplées parce que chaque composante de la vitesse est présente dans toutes les équations. Si le gradient de la pression est connu l'obtention des équations discrétisées est similaire avec les procédures présentées au chapitre 5. Comme le champ de pression est une partie de la solution globale du problème, le gradient de pression, normalement, n'est pas connu. Si l'écoulement est compressible l'équation de continuité peut

être utilisée comme l'équation de transport pour la densité et on ajoute au système (6.1-6.3) l'équation de conservation de l'énergie qui est une équation de transport pour la température. La pression peut alors être obtenue en utilisant la densité et la température à l'aide de l'équation d'état $p = p(r, T)$. Pourtant, si l'écoulement est incompressible alors la densité est constante et elle n'est pas liée à la pression. Dans ce cas le couplage entre la pression et la vitesse introduit une contrainte sur la solution du champ d'écoulement : si le champ de pression correct est introduit dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, le champ de vitesses qui en résulte vérifie l'équation de continuité.

Toutes les difficultés énoncées ci-dessus seront surmontées par l'utilisation d'une procédure itérative, comme l'algorithme de Patankar et Spalding appelé l'algorithme SIMPLE (**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for **P**ressure-**L**inked **E**quations). Dans cet algorithme le flux convectif par l'unité de masse, F, à travers les interfaces du volume de contrôle est évalué à partir d'un champ de vitesses estimé.

6.2 Représentation du gradient de pression dans les équations de quantité de mouvement discrétisées

La méthode des volumes finis commence par la discrétisation du domaine d'écoulement et des équations de transport (6.1–6.3). Tout d'abord, il faut décider sur les points de stockage des vitesses. Il semble logique de les stocker dans les mêmes points avec les autres variables, comme la pression, la température, etc. Pourtant, si la pression et la vitesse sont définies dans le noeud du volume de contrôle ordinaire, un champ de pression fortement non uniforme (en dentelé) peut être interpreté comme un champ uniforme par l'équation discrétisée de la quantité de mouvement. Ceci peut être illustré à l'aide de l'exemple présenté à la figure 6.1

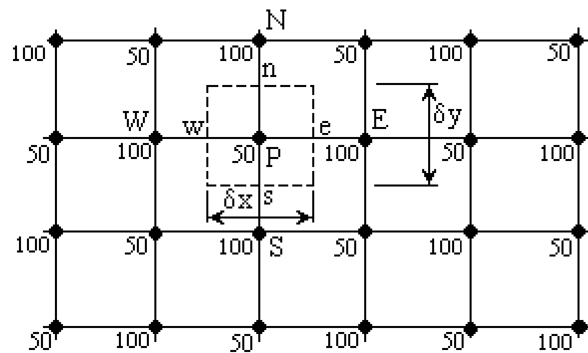


Fig. 6.1 *Champ de pression en zig-zag.*

Si la pression aux points 'e' et 'w' est obtenue par interpolation linéaire, le terme du gradient de pression $\partial p / \partial x$ dans l'équation (6.1) est donné par la relation :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\delta x} = \frac{\left(\frac{p_E - p_P}{2}\right) - \left(\frac{p_P - p_W}{2}\right)}{\delta x} = \frac{p_E - p_W}{2\delta x}. \tag{6.4}$$

De même, le terme du gradient de pression $\partial p / \partial y$ dans l'équation (6.2) est calculé par la relation :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_N - p_S}{2dy} . \tag{6.5}$$

On constate que la pression du noeud central P n'apparaît pas dans les expressions (6.4) et (6.5). Si l'on remplace les valeurs de la pression, présentées à la figure 6.1, dans les relations (6.4) et (6.5) on constate que tous les gradients aux points du maillage sont nuls même si le champ de pression a des oscillations dans toutes les deux directions. Dans ces conditions, le terme source, dans les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées, a la valeur zéro comme dans un champ de pression uniforme. Ce comportement n'est pas physiquement réaliste. Il est clair que si la vitesse est définie dans les noeuds ordinaires des volumes de contrôle, l'influence de la pression n'est pas correctement représentée dans les équations discrétisées de la quantité de mouvement.

6.3 Représentation de l'équation de continuité discrétisée

À la discrétisation de l'équation de continuité il aparaît la même difficulté. Pour illustrer cette difficulté on considère l'équation de continuité 1D stationnaire sous l'hypothèse que la densité est constante ($r = \text{cste}$). L'équation de continuité, dans ces conditions, s'écrit :

$$\frac{du}{dx} = 0 . \tag{6.6}$$

Si l'on intègre l'équation (6.6) sur le volume de contrôle présenté à la figure 6.2, on obtient :

$$u_e - u_w = 0 . \tag{6.7}$$

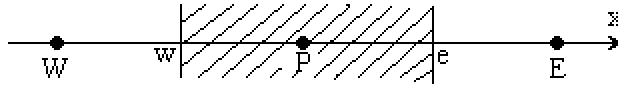


Fig. 6.2 *Volume de contrôle 1D*

Si l'on considère les interfaces du volume de contrôle situées à mi-distance, l'équation (6.7) devient :

$$\frac{u_P + u_E}{2} - \frac{u_W + u_P}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_E = u_W . \tag{6.8}$$

La conséquence de l'équation (6.8) est qu'un champ de vitesse discrétisé de type dentelé (non physique) peut satisfaire l'équation de continuité et être interprété comme un champ uniforme ($u = \text{cste}$).

6.4 Volumes de contrôle décalés (déplacés)

La méthode des volumes finis n'impose pas de calculer les différentes variables (u , v , w , T , p , etc.) sur la même grille (volume de contrôle). L'idée est de calculer les variables

scalaires, comme la pression, la densité, la température, etc., dans les noeuds ordinaires des volumes de contrôle, mais de calculer les composantes de la vitesse, sur des volumes de contrôle décalés, centrés autour des interfaces des volumes de contrôle initiaux. Un exemple d'un tel arrangement est présenté à la figure 6.3.

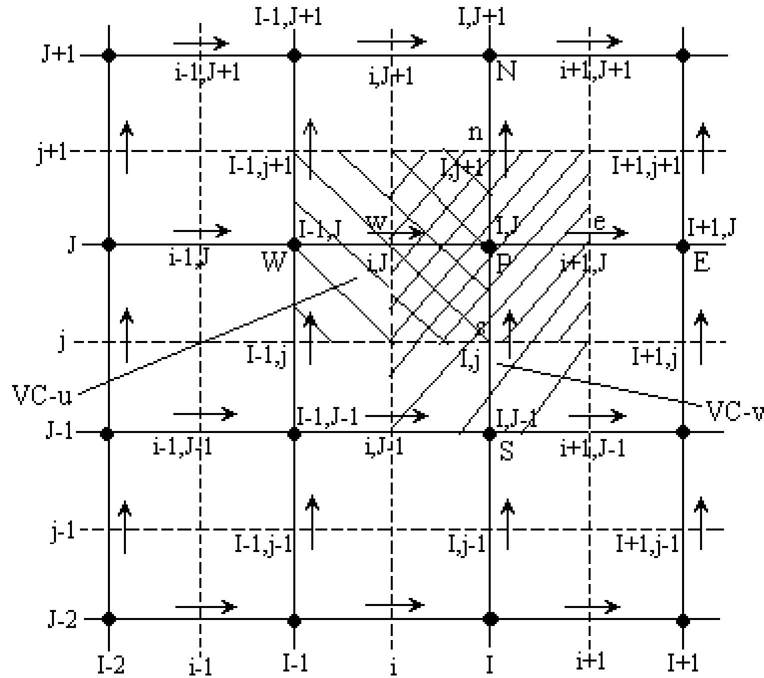


Fig. 6.3 Volumes de contrôle décalée: ***VC-u*** *pour la composante u de la vitesse ;* ***VC-v*** *pour la composante v de la vitesse.*

Les variables scalaires, y compris la pression, sont stockées aux noeuds marqués avec (•). Les composantes de la vitesse sont définis comme scalaires, entre les noeuds (aux interfaces), et sont indiquées par flèches. Les flèches horizontales (→) indique les points où est stockée la composante u de la vitesse, tandis que les flèches verticales (↑) indique les points où est stockée la composante v de la vitesse. À la figure 6.3 on a introduit un système supplémentaire de notation basé sur la numérotation des lignes du maillage et des interfaces des volumes de contrôle. Ce système de notation sera utilisé plus loin dans ce chapitre. Pour l'instant on continue d'utiliser la notation originale des noeuds, P, W, E, N, S. La composante u de la vitesse est stockée aux interfaces 'e' et 'w' et la composante v de la vitesse est stockée aux interfaces 'n' et 's'.

Dans le maillage décalé, les noeuds pour la pression sont les mêmes avec les interfaces des volumes de contrôle pour la composante u de la vitesse. Le gradient de la pression est donné par l'expression :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_W}{\delta x_u}, \tag{6.9}$$

où δx_u est la largeur du volume de contrôle de u (VC-u). De même, le gradient $\partial p / \partial y$ pour le volume de contrôle de v (VC-v) est donné par la relation :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_P - p_S}{\delta y_v}, \tag{6.10}$$

où δy_v est la largeur du VC-v. Si l'on calcule les gradients de pression à l'aide des relations (6.9) et (6.10) en utilisant un champ de pression de type dentelé on constate qu'ils ne sont plus nuls. Une autre conséquence importante du maillage décalé est que celui-ci génère les composantes de la vitesse même aux points où elles sont nécessaires pour le calcul du flux convectif ($F = ru$ peut être calculé sans interpolation aux interfaces e, w, n et s).

6.5 Équations de conservation de la quantité de mouvement

À la discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement, on utilise le nouveau système de notation. À la figure 6.3 les lignes continues sont numérotées par lettres majuscules. Dans la direction x la numérotation est $\ldots, I-1$, I, $I+1$, $\ldots$ et dans la direction y est $\ldots$, $J-1$, J, $J+1$, $\ldots$etc. Les lignes pointillées qui définissent les interfaces sont numérotées avec lettres miniscules, $\ldots$, $i-1$, i, $i+1$, $\ldots$ pour la direction x et $\ldots$, $j-1$, j, $j+1$, $\ldots$ pour la direction y. Les noeuds scalaires (marqués avec (•) à la figure 6.3) sont localisés à l'intersection des deux lignes du maillage et ils sont identifiés par deux lettres majuscules (le point P de la figure 6.3 est identifié par (I, J). La composante u de la vitesse est stockée aux points des interfaces 'e' et 'w' des volumes de contrôle scalaires. Ces points sont localisés à l'intersection d'une ligne définissant la frontière du volume de contrôle et une ligne du maillage. Ces points sont identifiés par une combinaison de miniscules lettres et lettres majuscules (par exemple, le point de l'interface 'w' autour du point P est identifié par (i, J). De même, la composante v de la vitesse est identifiée par une combinaison lettre majuscule – lettre miniscules (par exemple, le point de l'interface 's' autour du point P est identifié par (I, j). On peut utiliser des volumes de contrôle, pour le calcul de la vitesse, *décalés en avant* ou *décalés en arrière*. Les volumes de contrôle pour la composante u (VC-u) et pour la composante v (VC-v) présentés à la figure 6.3 sont de type décalés en arrière.

6.5.1 Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Soit un problème 2D stationnaire et le volume de contrôle pour le noeud 'e', décalé en avant, présenté à la figure 6.4

On intègre l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la composante u de la vitesse, (6.1) sur le volume de contrôle présenté à la figure 6.4

$$\int_{VC}\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)dV + \int_{VC}\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)dV = \int_{VC}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)dV + \int_{VC}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)dV - \int_{VC}\frac{\partial p}{\partial x}dV + \int_{VC}S_u dV \tag{6.11}$$

L'intégration (6.11) donne :

$$(\rho uu)_P^E\Delta y + (\rho vu)_{se}^{ne}\delta x_e = \left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P^E\Delta y + \left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{se}^{ne}\delta x_e - (p)_P^E\Delta y + \bar{S}_u\delta x_e\Delta y. \tag{6.12}$$

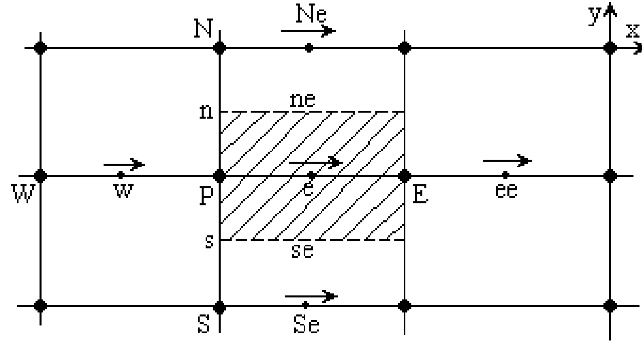


Fig. 6.4 *Volume de contrôle autour du point* ***e*** *pour* ***u.***

$$(\rho u)_E u_E \Delta y - (\rho u)_P u_P \Delta y + (\rho v)_{ne} u_{ne} \delta x_e - (\rho v)_{se} u_{se} \delta x_e =$$
$$\mu_E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_E \Delta y - \mu_P \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P \Delta y + \mu_{ne} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ne} \delta x_e - \mu_{se} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{se} \delta x_e + (p_P - p_E)\Delta y + \bar{S}_u \delta x_e \Delta y$$

(6.13)

Pour évaluer u_E et u_P on utilise un des schémas présentés au chapitre 5 (upwind, hybride, QUICK, etc.). Pour $(ru)_E$ et $(ru)_P$ on choisit une interpolation entre les noeuds voisins, comme :

$$(\rho u)_P = \rho_P \frac{u_w + u_e}{2}. \quad (6.14)$$

La relation (6.13), en tenant compte de la relation (6.14) devient :

$$\rho_E \frac{u_e + u_{ee}}{2} u_E \Delta y - \rho_P \frac{u_w + u_e}{2} u_P \Delta y + \rho_{ne} \frac{v_e + v_{Ne}}{2} u_{ne} \delta x_e - \rho_{se} \frac{v_e + v_{Se}}{2} u_{se} \delta x_e =$$
$$\mu_E \frac{u_{ee} - u_e}{\delta x_E} \Delta y - \mu_P \frac{u_e - u_w}{\delta x_P} \Delta y + \mu_{ne} \frac{u_{Ne} - u_e}{\Delta y} \delta x_e - \mu_{se} \frac{u_e - u_{Se}}{\Delta y} \delta x_e +$$
$$(p_P - p_E)\Delta y + \bar{S}_u \delta x_e \Delta y$$

(6.15)

Finalement, on obtient une équation discrétisée, sous la forme générale suivante, pour la composante u :

$$a_e u_e = a_w u_w + a_{ee} u_{ee} + a_{Se} u_{Se} + a_{Ne} u_{Ne} + b + (p_P - p_E) A_e, \quad (6.16)$$

ou

$$a_e u_e = \sum a_{vs} u_{vs} + b + (p_P - p_E) A_e, \quad (6.17)$$

où $A_e = \Delta y \cdot 1$ $\qquad b = \bar{S}_u \delta x_e \Delta y$.

Les coefficients a_e et a_{vs} sont calculés avec l'une des méthodes aux différences présentées aux problèmes de convection-diffusion au chapitre 5 (upwind, hybride, power law, QUICK).

De la même manière, on obtient une équation discrétisée pour v, en intégrant l'équation (6.2), à partir du volume de contrôle autour du noeud n, présenté à la figure 6.5

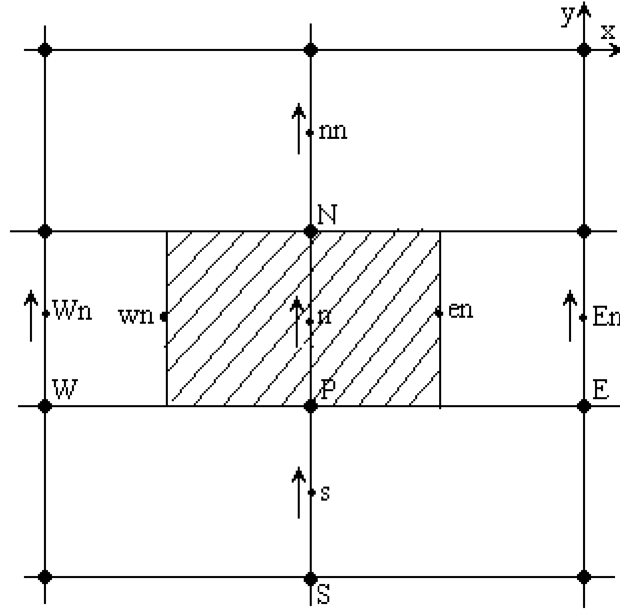


Fig. 6.5 *Volume de contrôle autour du point n pour v.*

On obtient ainsi l'équation discrétisée suivante :

$$a_n v_n = \sum a_{vs} v_{vs} + b + \left(p_P - p_N\right) A_n , \tag{6.18}$$

où $b = \bar{S}_v \Delta x \delta y_n \qquad A_n = \Delta x \cdot 1 .$

Si l'on exprime l'équation (6.17) en fonction du nouveau système de coordonnées (de numérotation des noeuds, fig.6.3), on a :

$$a_{i,J} u_{i,J} = \sum a_{vs} u_{vs} + b_{i,J} + \left(p_{I-1,J} - p_{I,J}\right) A_{i,J} . \tag{6.19}$$

Dans le nouveau système de numérotation les points voisins W, E, S et N impliqués dans la somme $\sum a_{vs} u_{vs}$, présentés à la figure 6.6, sont les noeuds $\left(i-1, J\right)$, $\left(i+1, J\right)$, $(i, J-1)$ et $(i, J+1)$. Les coefficients de l'équation (6.19) contiennent une combinaison du flux convectif F et de la conductance de diffusion D aux interfaces des volumes de contrôle pour la composante u de la vitesse. Les valeurs de F et D pour chaque interface w, e, s et n du volume de contrôle sont données par les relations suivantes :

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,J} + F_{i-1,J}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2}\right)u_{i,J} + \left(\frac{\rho_{I-1,J} + \rho_{I-2,J}}{2}\right)u_{i-1,J}\right] \quad (6.20)$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,J} + F_{i,J}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\rho_{I+1,J} + \rho_{I,J}}{2}\right)u_{i+1,J} + \left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2}\right)u_{i,J}\right] \quad (6.21)$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{I,j} + F_{I-1,j}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2}\right)v_{I,j} + \left(\frac{\rho_{I-1,J} + \rho_{I-1,J-1}}{2}\right)v_{I-1,j}\right] \quad (6.22)$$

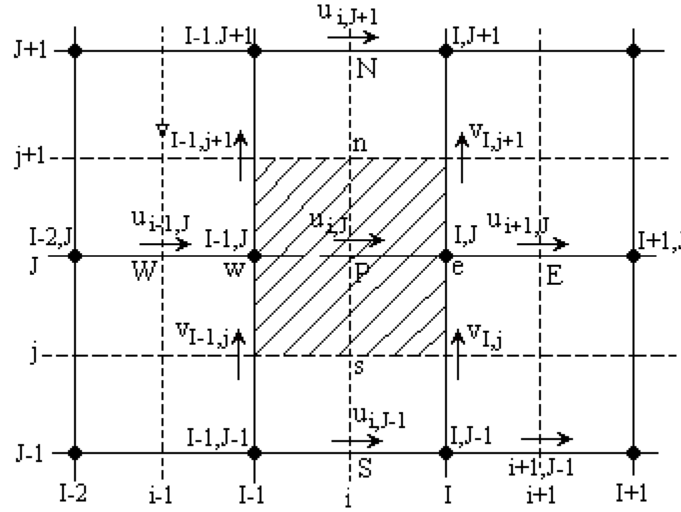


Fig. 6.6 *Volume de contrôle pour la composante* u .

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{I,j+1} + F_{I-1,j+1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\rho_{I,J+1} + \rho_{I,J}}{2}\right)v_{I,j+1} + \left(\frac{\rho_{I-1,J+1} + \rho_{I-1,J}}{2}\right)v_{I-1,j+1}\right]; \quad (6.23)$$

$$D_w = \frac{\mu_{I-1,J}}{dx_w} \; ; \quad (6.24)$$

$$D_e = \frac{\mu_{I,J}}{dx_e} \; ; \quad (6.25)$$

$$D_s = \frac{\mu_{I-1,J} + \mu_{I,J} + \mu_{I-1,J-1} + \mu_{I,J-1}}{4dy_s} \; ; \quad (6.26)$$

$$D_n = \frac{\mu_{I-1,J-1} + \mu_{I,J+1} + \mu_{I-1,J} + \mu_{I,J}}{4dy_n} \; . \quad (6.27)$$

Les formules (6.20 - 6.27) montrent que dans les points où les variables scalaires ou les composantes de la vitesse ne sont pas disponibles on peut utiliser la moyenne des deux ou même quatre points voisins pour lesquels les valeurs des variables sont disponibles. Pendant chaque itération les valeurs des composants u et v utilisées pour le calcul des coefficients

ci-dessus sont celles de l'itération précédente (ou celles estimées pour la première itération). Il faut remarquer que ces *valeurs connues,* des u et v, sont utilisées pour le calcul des coefficients a dans l'équation (6.19). Ces valeurs *connues* sont distinctes de $u_{i,J}$ et u_{vs} qui sont les variables scalaires *inconnues.*

De même on peut obtenir l'équation pour la composante v de la vitesse :

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{vs}v_{vs} + b_{I,j} + (p_{I,J-1} - p_{I,J})A_{I,j} . \tag{6.28}$$

Les variables impliquées dans la somme $\sum a_{vs}v_{vs}$ sont présentées à la figure 6.7

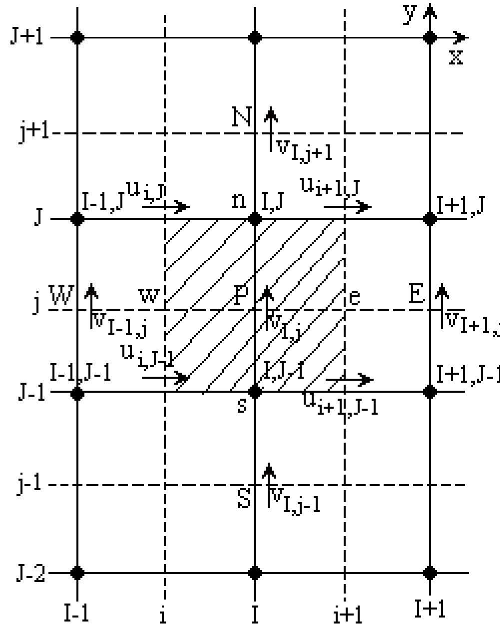


Fig. 6.7 *Volume de contrôle pour la composante* v.

Les coefficients de l'équation (6.28), $a_{I,j}$ et a_{vs} contiennent une combinaison du flux convectif F et de la conductance de viscosité D aux interfaces des volumes de contrôle pour la composante v de la vitesse. Les valeurs de F et D pour chaque interface w, e, s et n du volume de contrôle sont données par les relations suivantes :

$$F_w = (ru)_w = \frac{F_{i,J} + F_{i,J-1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_{I,J} + r_{I-1,J}}{2}\right)u_{i,J} + \left(\frac{r_{I-1,J-1} + r_{I,J-1}}{2}\right)u_{i,J-1}\right] \tag{6.29}$$

$$F_e = (ru)_e = \frac{F_{i+1,J} + F_{i+1,J-1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_{I+1,J} + r_{I,J}}{2}\right)u_{i+1,J} + \left(\frac{r_{I,J-1} + r_{I+1,J-1}}{2}\right)u_{i+1,J-1}\right] \tag{6.30}$$

$$F_s = (rv)_s = \frac{F_{I,j-1} + F_{I,j}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_{I,J} + r_{I,J-1}}{2}\right)v_{I,j-1} + \left(\frac{r_{I,J} + r_{I,J-1}}{2}\right)v_{I,j}\right] \tag{6.31}$$

$$F_n = (rv)_n = \frac{F_{I,j} + F_{I,j+1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r_{I,J} + r_{I,J-1}}{2}\right)v_{I,j} + \left(\frac{r_{I,J+1} + r_{I,J}}{2}\right)v_{I,j+1}\right] \qquad (6.32)$$

$$D_w = \frac{m_{I-1,J-1} + m_{I,J-1} + m_{I-1,J} + m_{I,J}}{4dx_w} \qquad (6.33)$$

$$D_e = \frac{m_{I,J-1} + m_{I+1,J-1} + m_{I,J} + m_{I+1,J}}{4dx_e} \qquad (6.34)$$

$$D_s = \frac{m_{I,J-1}}{dy_s} \qquad (6.35)$$

$$D_n = \frac{m_{I,J}}{dy_n} \qquad (6.36)$$

Les équations (6.19) et (6.28) ne pourront être résolues que si la pression p est connue ou estimée. Si la pression correcte est connue, le champ de vitesse obtenu après la résolution du système algébrique linéaire satisfera l'équation de continuité. Comme la pression n'est pas connue, il est nécessaire une procédure pour calculer la pression.

6.6 L'algorithme SIMPLE

L'algorithme SIMPLE (**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for **P**ressure-**L**inked **E**quations) a été créé par Patankar et Spalding (1972), [17], et il est une procédure itérative pour calculer la pression en utilisant le maillage déplacé. La procédure itérative commence par l'estimation de la pression. Soit p^* le champ de pression estimé. Les équations (6.19) et (6.28) sont résolues pour obtenir le champ de vitesse associé u^* et v^* :

$$a_{i,J}u^*_{i,J} = \sum a_{vs}u^*_{vs} + b_{i,J} + \left(p^*_{I-1,J} - p^*_{I,J}\right)A_{i,J} \; ; \qquad (6.37)$$

$$a_{I,j}v^*_{I,j} = \sum a_{vs}v^*_{vs} + b_{I,j} + \left(p^*_{I,J-1} - p^*_{I,J}\right)A_{I,j} \; . \qquad (6.38)$$

On définit la correction de la pression p' comme la différence entre la pression correcte p et la pression estimée p^* :

$$p = p^* + p' . \qquad (6.39)$$

De façon similaire on définit la correction des vitesses u' et v' comme la différence entre les vitesses correctes u, v et les vitesses estimées u^* et v^* :

$$u = u^* + u' ; \qquad (6.40)$$

$$v = v^* + v' . \qquad (6.41)$$

La substitution du champ de pression correct, p, dans les équations de conservation de la quantité de mouvement donne le champ de vitesse correct (u, v). Les équations discrétisées (6.19) et (6.28) lient le champ de vitesse correct avec le champ de pression correct.

La soustraction des équations (6.37) et (6.38) des équations (6.19) et (6.28) respectivement, donne :

$$a_{i,J}\left(u_{i,J} - u^*_{i,J}\right) = \sum a_{vs}\left(u_{vs} - u^*_{vs}\right) + \left[\left(p_{I-1,J} - p^*_{I-1,J}\right) - \left(p_{I,J} - p^*_{I,J}\right)\right]A_{i,J} \qquad (6.42)$$

$$a_{I,j}\left(v_{I,j} - v^*_{I,j}\right) = \sum a_{vs}\left(v_{vs} - v^*_{vs}\right) + \left[\left(p_{I,J-1} - p^*_{I,J-1}\right) - \left(p_{I,J} - p^*_{I,J}\right)\right]A_{I,j} \qquad (6.43)$$

En utilisant les formules de correction (6.39-6.41) les équations (6.42) et (6.43) peuvent être réécrites ainsi :

$$a_{i,J}u'_{i,J} = \sum a_{vs}u'_{vs} + \left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right)A_{i,J}\ ; \qquad (6.44)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{vs}v'_{vs} + \left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right)A_{I,j}\ . \qquad (6.45)$$

À ce moment une approximation est introduite: les termes $\sum a_{vs}u'_{vs}$ et $\sum a_{vs}v'_{vs}$ sont négligés pour simplifier les équations (6.44) et (6.45). ***L'omission de ces termes est la principale approximation de l'algorithme SIMPLE***. On obtient :

$$u'_{i,J} = d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right), \qquad (6.46)$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right), \qquad (6.47)$$

où $d_{i,J} = \dfrac{A_{i,J}}{a_{i,J}}$ et $d_{I,j} = \dfrac{A_{I,j}}{a_{I,j}}$.

Les équations (6.46) et (6.47) décrivent les corrections qui doivent être appliquées aux vitesses à travers les formules (6.40) et (6.41), ce qui donne :

$$u_{i,J} = u^*_{i,J} + d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right); \qquad (6.48)$$

$$v_{I,j} = v^*_{I,j} + d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right). \qquad (6.49)$$

Des expressions similaires existent pour $u_{i+1,J}$ et $v_{I,j+1}$:

$$u_{i+1,J} = u^*_{i+1,J} + d_{i+1,J}\left(p'_{I,J} - p'_{I+1,J}\right), \qquad (6.50)$$

$$v_{I,j+1} = v^*_{I,j+1} + d_{I,j+1}\left(p'_{I,J} - p'_{I,J+1}\right), \qquad (6.51)$$

où $d_{i+1,J} = \dfrac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}}$ et $d_{I,j+1} = \dfrac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}}$.

Jusqu'à maintenant on a considéré les équations de conservation de la quantité de mouvement, mais le champ de vitesse, en même temps doit satisfaire l'équation de continuité (6.3). L'équation de continuité discrétisée, obtenue par l'intégration de l'équation (6.3) sur le volume de contrôle présenté à la figure 6.8, est :

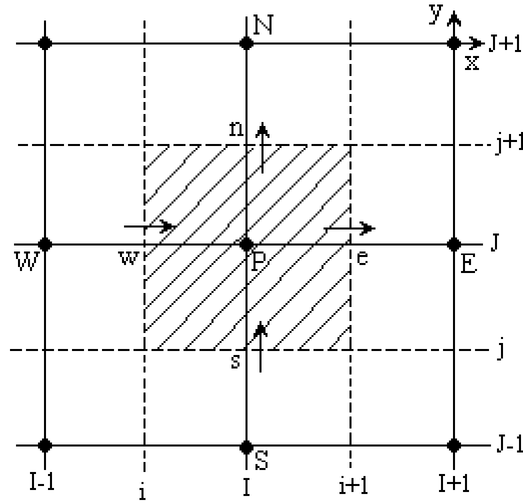


***Fig. 6.8** Volume de contrôle utilisé pour la discrétisation de l'équation de continuité.*

$$\left[(\rho uA)_{i+1,J} - (\rho uA)_{i,J}\right] + \left[(\rho vA)_{I,j+1} - (\rho vA)_{I,j}\right] = 0 \,. \qquad (6.52)$$

La substitution des équations corrigées (6.48 – 6.51) dans l'équation de continuité discrétisée (6.52) donne :

$$\begin{aligned}&\left[r_{i+1,J} A_{i+1,J}\left(u^*_{i+1,J} + d_{i+1,J}\left(p'_{I,J} - p'_{I+1,J}\right)\right) - r_{i,J} A_{i,J}\left(u^*_{i,J} + d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right)\right)\right] + \\ &\left[r_{I,j+1} A_{I,j+1}\left(v^*_{I,j+1} + d_{I,j+1}\left(p'_{I,J} - p'_{I,J+1}\right)\right) - r_{I,j} A_{I,j}\left(v^*_{I,j} + d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right)\right)\right] = 0\end{aligned} \,. \qquad (6.53)$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}&\left[(\rho dA)_{i+1,J} + (\rho dA)_{i,J} + (\rho dA)_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j}\right] p'_{I,J} = \\ &(\rho dA)_{i+1,J}\, p'_{I+1,J} + (\rho dA)_{i,J}\, p'_{I-1,J} + (\rho dA)_{I,j}\, p'_{I,J+1} + (\rho dA)_{I,j}\, p'_{I,J-1} + . \\ &\left[(\rho u^* A)_{i,J} + (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} + (\rho v^* A)_{I,j+1}\right]\end{aligned} \qquad (6.54)$$

En identifiant les coefficients de la correction de pression p' l'équation (6.54) peut être réécrite sous la forme générale suivante :

$$a_{I,J}\, p'_{I,J} = a_{I+1,J}\, p'_{I+1,J} + a_{I-1,J}\, p'_{I-1,J} + a_{I,J+1} p'_{I,J+1} + a_{I,J-1} p'_{I,J-1} + b'_{I,J} \,, \qquad (6.55)$$

où : $a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$.

$a_{I+1,J}$	$a_{I-1,J}$	$a_{I,J+1}$	$a_{I,J-1}$	$b'_{I,J}$
$(\rho dA)_{i+1,J}$	$(\rho dA)_{i,J}$	$(\rho dA)_{I,j+1}$	$(\rho dA)_{I,j}$	$(\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} +$ $(\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}$

L'équation (6.55) représente l'équation de continuité discrétisée comme une *équation de correction de pression* $p^{'}$. Le terme source $b^{'}$ apparaît à cause du fait qu'on utilise un champ de vitesse incorrect u^{*} et v^{*}. Si $b^{'}=0$ celui-ci implique plus de correction de pression nécessaire. Par la résolution de l'équation (6.55) on obtient la correction de pression pour tous les points du maillage et alors la pression correcte peut être calculée à l'aide de la formule (6.39) et les composantes de la vitesse avec les formules de correction (6.40) et (6.41). L'omission du terme $\sum a_{vs}u_{vs}^{'}$ ne doit pas affecter la solution finale parce que les corrections de pression et de vitesse seront nulles à la convergence.

Il est possible que le processus itératif soit divergent. Pour remédier cet inconvénient, pendant le processus itératif on peut utiliser la sous-relaxation :

$$p^{nouv} = p^{*} + \alpha_{p} p^{'}, \tag{6.56}$$

où $0 < \alpha_{p} < 1$ est un facteur de sous-relaxation.

Les composantes de la vitesse doivent aussi être sous-relaxées en utilisant les relations :

$$u^{nouv} = \alpha_{u}u + (1-\alpha_{u})u^{(n-1)} ; \tag{6.57}$$

$$v^{nouv} = \alpha_{v}v + (1-\alpha_{v})v^{(n-1)}, \tag{6.58}$$

où α_{u} et α_{v} sont les facteurs de sous-relaxation pour pour les composantes de la vitesse, u et v sont les composantes corrigées sans relaxation tandis que $u^{(n-1)}$ et $v^{(n-1)}$ représentent leurs valeurs à l'itération précédente. On peut facilement montrer que les équations de conservation de la quantité de mouvement, en tenant compte du facteur de sous-relaxation, peuvent devenir :

$$\frac{a_{i,J}}{\alpha_{u}}u_{i,J} = \sum a_{vs}u_{vs} + \left(p_{I-1,J} - p_{I,J}\right)A_{i,J} + b_{i,J} + \left[(1-\alpha_{u})\frac{a_{i,J}}{\alpha_{u}}\right]u_{i,J}^{(n-1)} ; \tag{6.59}$$

$$\frac{a_{I,j}}{\alpha_{v}}v_{I,j} = \sum a_{vs}v_{vs} + \left(p_{I,J-1} - p_{I,J}\right)A_{I,j} + b_{I,j} + \left[(1-\alpha_{v})\frac{a_{I,j}}{\alpha_{v}}\right]v_{I,j}^{(n-1)} . \tag{6.60}$$

L'équation de correction de pression est également affectée par le facteur de sous-relaxation et on peut montrer que :

$$d_{i,J} = \frac{A_{i,J}\alpha_{u}}{a_{i,J}} \quad d_{i+1,J} = \frac{A_{i+1,J}\alpha_{u}}{a_{i+1,J}} \quad d_{I,j} = \frac{A_{I,j}\alpha_{u}}{a_{I,j}} \quad d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1}\alpha_{u}}{a_{I,j+1}} . \tag{6.61}$$

L'algorithme SIMPLE est une méthode pour calculer la pression et la vitesse mais quand d'autres variables sont couplées aux équations de conservation de la quantité de mouvement, par exemple la température, la résolution doit être séquentielle. La séquence des étapes dans l'algorithme SIMPLE est présentée à la figure 6.9

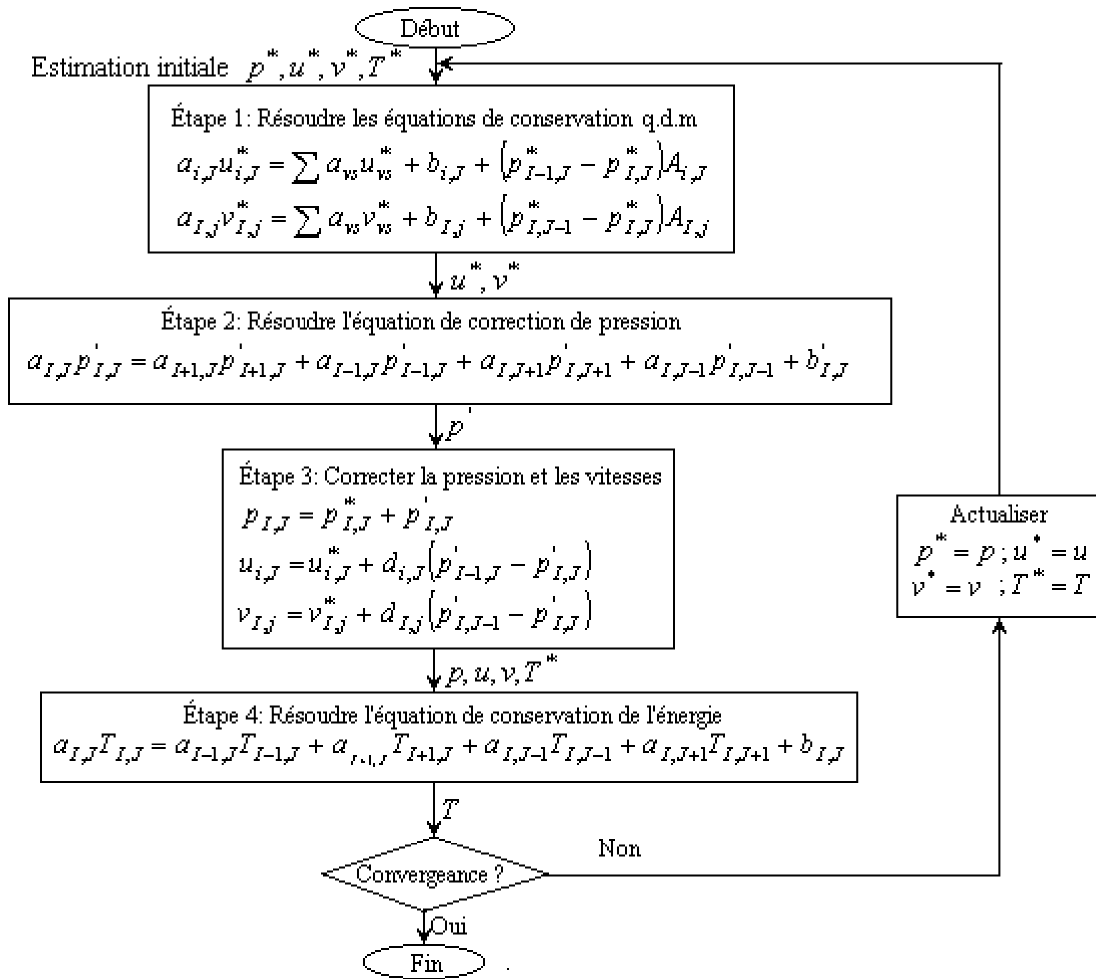


Fig. 6.9 *L'algorithme SIMPLE*

6.7 L'algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (**SIMPLE R**evised), mise au point par Patankar (1980), [50], est une version améliorée de l'algorithme SIMPLE. Selon cet algorithme l'équation de continuité discrétisée (6.52) est utilisée pour obtenir *une équation discrétisée pour la pression* au lieu d'une équation de correction de pression comme dans l'algorithme SIMPLE. Le champ de pression est obtenu directement, sans correction de pression, mais le champ de vitesse est obtenu à l'aide de la correction en utilisant les équations (6.48 - 6.51).

Les équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisées (6.19) et (6.28) sont écrites sous la forme suivante :

$$u_{i,J} = \frac{\sum a_{vs}u_{vs} + b_{i,J}}{a_{i,J}} + \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}}\left(p_{I-1,J} - p_{I,J}\right); \qquad (6.62)$$

$$v_{I,j} = \frac{\sum a_{vs}v_{vs} + b_{I,j}}{a_{I,j}} + \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}\left(p_{I,J-1} - p_{I,J}\right). \qquad (6.63)$$

Selon l'algorithme SIMPLER, on définit les pseudo-vitesses $\hat{u}$ et $\hat{v}$ ainsi :

$$\hat{u}_{i,J} = \frac{\sum a_{vs} u_{vs} + b_{i,J}}{a_{i,J}}; \qquad (6.64)$$

$$\hat{v}_{I,j} = \frac{\sum a_{vs} v_{vs} + b_{I,j}}{a_{I,j}}. \qquad (6.65)$$

Les équations (6.62) et (6.63) peuvent être écrites ainsi :

$$u_{i,J} = \hat{u}_{i,J} + d_{i,J}\left(p_{I-1,J} - p_{I,J}\right); \qquad (6.66)$$

$$v_{I,j} = \hat{v}_{Ii,j} + d_{I,j}\left(p_{I,J-1} - p_{I,J}\right). \qquad (6.67)$$

En remplaçant les vitesses $u_{i,J}$ et $v_{I,j}$ données par les relations (6.66) et (6.67) dans l'équation de continuité discrétisée (6.52) on obtient :

$$\begin{aligned}&\left[r_{i+1,J} A_{i+1,J}\left(\hat{u}_{i+1,J} + d_{i+1,J}\left(p_{I,J} - p_{I+1,J}\right)\right) - r_{i,J}\left(\hat{u}_{i,J} + d_{i,J}\left(p_{I-1,J} - p_{I,J}\right)\right)\right] + \\ &\left[r_{I,j+1} A_{I,j+1}\left(\hat{v}_{I,j+1} + d_{I,j+1}\left(p_{I,J} - p_{I,J+1}\right)\right) - r_{I,j} A_{I,j}\left(\hat{v}_{I,j} + d_{I,j}\left(p_{I,J-1} - p_{I,J}\right)\right)\right] = 0\end{aligned} \qquad (6.68)$$

En regroupant les termes dans l'équation (6.68) on obtient l'équation de pression discrétisée :

$$a_{I,J} p_{I,J} = a_{I+1,J} p_{I+J} + a_{I-1,J} p_{I-1,J} + a_{I,J+1} p_{I,J+1} + a_{I,J-1} p_{I,J-1} + b_{I,J}, \qquad (6.69)$$

où $a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$.

$a_{I+1,J}$	$a_{I-1,J}$	$a_{I,J+1}$	$a_{I,J-1}$	$b_{I,J}$
$(\rho dA)_{i+1,J}$	$(\rho dA)_{i,J}$	$(\rho dA)_{I,j+1}$	$(\rho dA)_{I,j}$	$(\rho\hat{u}A)_{i,J} - (\rho\hat{u}A)_{i+1,J} +$ $(\rho\hat{v}A)_{I,j} - (\rho\hat{v}A)_{I,j+1}$

On constate que les coefficients de l'équation (6.69) sont les mêmes avec les coefficients de l'équation de correction de pression (6.55), sauf le terme-source $b_{I,J}$ qui est calculé en utilisant les pseudo-vitesses. Les équations (6.19) et (6.28) sont résolues, en utilisant le champ de pression obtenu à l'aide de l'équation (6.69), et on obtient les composantes des vitesses u^* et v^*. Ensuite, les équations de correction de vitesse (6.48) et (6.49) sont utilisées pour obtenir les vitesses corrigées. Pourtant, l'équation de correction de pression (6.55) est utilisée pour la correction de vitesse.

Résumé de l'algorithme SIMPLER

L'algorithme consiste dans la résolution de l'équation de la pression pour obtenir le champ de pression et dans la résolution de l'équation de correction de pression seulement pour corriger les vitesses.

Les étapes qui doivent être parcourues dans cet algorithme sont :

1. *On commence par l'estimation (choix initial) du champ de vitesses,* u^* *et* v^**, du champ de pression* p^* *et de la variable de transport* Φ^* *(qui dans le cas de l'équation de conservation de l'énergie , par exemple, est la température) ;*
2. *Calculer les pseudo-vitesses* $\hat{u}$ *et* $\hat{v}$*, après le calcul des coefficients* a_{vs}*,…, à l'aide des relations (6.64) et (6.65) ;*
3. *Calculer les coefficients et résoudre l'équation de la pression (6.69) pour obtenir le champ de pression* p *;*
4. *Initialiser le champ de pression initial* p^**, avec le nouveau champ de pression obtenu à l'étape 3 (*$p^* = p$*) et résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement (6.37) et (6.38) pour obtenir* u^* *et* v^* *;*
5. *Calculer les coefficients et le terme-source* $b'_{I,J}$ *et puis résoudre l'équation de correction de pression (6.55) pour obtenir la correction de pression* p' *;*
6. *Corriger le champ de vitesses à l'aide des relations (6.48 – 6.51), mais sans corriger la pression ;*
7. *Calculer les coefficients et le terme-source et puis résoudre l'équation de transport pour autre variable* Φ *(la température* T*, par exemple, si on utilise l'équation de conservation de l'énergie) ;*
8. *Réinitialiser toutes les variables calculées aux étapes 3, 6, et 7 (*$p^* = p$*,* $u^* = u$*,* $v^* = v$*,* $\Phi^* = \Phi$*) et puis retour à l'étape 2 ;*
9. *Répéter les étapes 2 à 8 jusqu'à l'obtention de la convergence.*

6.8 L'algorithme SIMPLEC

L'algorithme SIMPLEC (**SIMPLE C**onsistent) a été mis au point par Van Doormal et Raithby (1984), [35], [81]. Les étapes de cet algorithme sont presque les mêmes que celles de l'algorithme SIMPLE avec la différence que dans les équations de correction des vitesses on néglige les termes les moins significatifs.

L'équation de correction pour la composante u est :

$$u'_{i,J} = d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right), \tag{6.70}$$

où : $$d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J} - \sum a_{vs}}. \tag{6.70a}$$

De même, pour la composante v on a :

$$v'_{I,j} = d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right), \tag{6.71}$$

où : $$d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j} - \sum a_{vs}}. \tag{6.71a}$$

L'équation de correction de pression est la même que dans l'algorithme SIMPLE à l'exception des termes d qui sont calculés à l'aide des relations (6.70a) et (6.71a). La séquence des étapes est la même que dans l'algorithme SIMPLE (voir le paragraphe 6.6).

6.9 L'algorithme PISO

L'algorithme PISO (**P**ressure **I**mplicit with **S**plitting of **O**perators) a été mis au point par Issa (1986). Cet algorithme a été développé initialement comme une procédure non iterative pour le calcul des écoulements compressibles instationnaires. Ultérieurement l'algorithme a été bien adapté pour la procédure itérative appliquée aux problèmes stationnaires. L'algorithme est une extension de l'algorithme SIMPLE ayant une étape de correction de plus.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement (6.37) et (6.38) sont résolues à partir d'un champ de pression p^* pour obtenir les composantes u^* et v^* en utilisant la même méthode de l'algorithme SIMPLE.

L'étape de correction 1

Le champ de vitesses u^* et v^* ne satisfera pas l'équation de continuité si le champ de pression p^* n'est pas correct. Cette première étape de correction est introduite pour obtenir le champ de vitesses (u^{**}, v^{**}) qui satisfait l'équation de continuité discrétisée. Les équations qui en résultent sont les mêmes avec les équations de correction des vitesses (6.46) et (6.47) de l'algorithme SIMPLE mais celui-ci constitue une première étape de correction dans l'algoritme PISO, et pour cela on utilise des notations différentes :

$$p^{**} = p^* + p' ;$$

$$u^{**} = u^* + u' ;$$

$$v^{**} = v^* + v' .$$

Les formules ci-dessus sont utilisées pour définir les vitesses corrigées u^{**} et v^{**} :

$$u_{i,J}^{**} = u_{i,J}^* + d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right); \tag{6.72}$$

$$v_{I,j}^{**} = v_{I,j}^* + d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right). \tag{6.73}$$

Comme dans l'algorithme SIMPLE les équations (6.72) et (6.73) sont substituées dans l'équation de continuité discrétisée (6.52) pour obtenir l'équation de correction de pression (6.55). Dans le contexte de l'algorithme PISO l'équation (6.55) est appelée *la première équation de correction de pression.* La résolution de celle-ci donne le premier champ de correction de pression p'. Une fois la correction de pression étant connue les composantes de la vitesse u^{**} et v^{**} peuvent être obtenues à l'aide des équations (6.72) et (6.73).

L'étape de correction 2

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisée pour u^{**} et v^{**} sont :

$$a_{i,J} u_{i,J}^{**} = \sum a_{vs} u_{vs}^* + \left(p_{I-1,J}^{**} - p_{I,J}^{**}\right) A_{i,J} + b_{i,J} \;; \tag{6.74}$$

$$a_{I,j} v_{I,j}^{**} = \sum a_{vs} v_{vs}^* + \left(p_{I,J-1}^{**} - p_{I,J}^{**}\right) A_{I,j} + b_{I,j} \;. \tag{6.75}$$

Un troisième champ de vitesses corrigées (u^{***}, v^{***}) par la résolution des équations :

$$a_{i,J} u_{i,J}^{***} = \sum a_{vs} u_{vs}^{**} + \left(p_{I-1,J}^{***} - p_{I,J}^{***}\right) A_{i,J} + b_{i,J} \;; \tag{6.76}$$

$$a_{I,j} v_{I,j}^{***} = \sum a_{vs} v_{vs}^{**} + \left(p_{I,J-1}^{***} - p_{I,J}^{***}\right) A_{I,j} + b_{I,j} \,. \tag{6.77}$$

Il faut remarquer que les sommes sont évaluées en utilisant les vitesses u^{**} et v^{**} calculées dans l' étape précédente de correction.

En soustrayant l'équation (6.74) de l'équation (6.76) et (6.75) de (6.77) on obtient :

$$u_{i,J}^{***} = u_{i,J}^{**} + \frac{\sum avs\left(u_{vs}^{**} - u_{vs}^{*}\right)}{a_{i,J}} + d_{i,J}\left(p_{I-1,J}^{''} - p_{I,J}^{''}\right) \;; \tag{6.78}$$

$$v_{I,j}^{***} = v_{I,j}^{**} + \frac{\sum avs\left(v_{vs}^{**} - v_{vs}^{*}\right)}{a_{I,j}} + d_{I,j}\left(p_{I,J-1}^{''} - p_{I,J}^{''}\right), \tag{6.79}$$

où $p^{''}$ est la deuxième correction de pression et p^{***} peut être obtenue par la relation suivante :

$$p^{***} = p^{**} + p^{''}. \tag{6.80}$$

La substitution de u^{***} et v^{***} dans l'équation de continuité discrétisée (6.52) donne la *deuxième équation de correction de pression :*

$$a_{I,J}\, p_{I,J}^{''} = a_{I+1,J}\, p_{I+1,J}^{''} + a_{I-1,J}\, p_{I-1,J}^{''} + a_{I,J+1} p_{I,J+1}^{''} + a_{I,J-1} p_{I,J-1}^{''} + b_{I,J}^{''}, \tag{6.81}$$

avec $a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$ et les coefficients voisins donnés dans le tableau ci-dessous :

$a_{I+1,J}$	$a_{I-1,J}$	$a_{I,J+1}$	$a_{I,J-1}$	$b_{I,J}^{''}$
$(\rho dA)_{i+1,J}$	$(\rho dA)_{i,J}$	$(\rho dA)_{I,j+1}$	$(\rho dA)_{I,j}$	$\left[\left(\frac{\rho A}{a}\right)_{i,J} \sum a_{vs}\left(u_{vs}^{**} - u_{vs}^{*}\right) - \left(\frac{\rho A}{a}\right)_{i+1,J} \sum a_{vs}\left(u_{vs}^{**} - u_{vs}^{*}\right) + \left(\frac{\rho A}{a}\right)_{I,j} \sum a_{vs}\left(v_{vs}^{**} - v_{vs}^{*}\right) - \left(\frac{\rho A}{a}\right)_{I,j+1} \sum a_{vs}\left(v_{vs}^{**} - v_{vs}^{*}\right)\right]$

À l'obtention de l'équation (6.81) le terme-source

$$\left[\left(\rho A u^{**}\right)_{i,J} - \left(\rho A u^{**}\right)_{i+1,J} + \left(\rho A v^{**}\right)_{I,j} - \left(\rho A v^{**}\right)_{I,j+1}\right],$$

est zéro si les composantes u^{**} et v^{**} satisfont l'équation de continuité.

L'équation (6.81) est résolue pour obtenir le deuxième champ de correction de pression p'' et un troisième champ de pression corrigé est obtenu par la relation :

$$p^{***} = p^{**} + p'' = p^{*} + p' + p''. \tag{6.82}$$

Finalement, on obtient un troisième champ de vitesses corrigé à l'aide des équations (6.78) et (6.79).

Résumé de l'algorithme PISO

Les étapes qui doivent être parcourues dans cet algorithme sont :

1. *L'estimation initiale du champ de vitesses u^* et v^*, du champ de pression p^* et de la variable de transport Φ^* ;*
2. *Parcourir les étapes 1, 2 et 3 de l'algorithme SIMPLE, c'est-à-dire :*
   - *Résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement ;*
   - *Résoudre l'équation de correction de pression pour obtenir p' ;*
   - *Corriger la pression et les vitesses ;*

   pour actualiser p^*, u^* et v^*.
3. *Calculer les coefficients et le terme source $b''_{I,J}$ et puis résoudre la deuxième équation de correction de pression (6.81) ;*
4. *Corriger la pression et les vitesses à l'aide des relations :*

$$p^{***}_{I,J} = p^{*}_{I,J} + p'_{I,J} + p''_{I,J} \ ;$$

$$u^{***}_{i,J} = u^{*}_{i,J} + d_{i,J}\left(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}\right) + \frac{\sum a_{vs}\left(u^{**}_{vs} - u^{*}_{vs}\right)}{a_{i,J}} + d_{i,J}\left(p''_{I-1,J} - p''_{I,J}\right);$$

$$v^{***}_{I,j} = v^{*}_{I,j} + d_{I,j}\left(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}\right) + \frac{\sum a_{vs}\left(v^{**}_{vs} - v^{*}_{vs}\right)}{a_{I,j}} + d_{I,j}\left(p''_{I,J-1} - p''_{I,J}\right).$$

5. *Actualiser la pression et les vitesses, $p = p^{***}$, $u = u^{***}$ et $v = v^{***}$;*
6. *Calculer les coefficients et le terme source et puis résoudre l'équation de transport pour la variable Φ ;*
7. *Réinitialise toutes les variables calculées aux étapes 5 et 6 ($p^* = p$, $u^* = u$, $v^* = v$, $\Phi^* = \Phi$) et puis retour à l'étape 2 ;*
8. *Répéter les étapes 2 à 7 jusqu'à la convergence.*

Cet algorithme implique un considérable effort de stockage en mémoire à cause du deuxième équation de correction de pression. L'algorithme peut être appliqué, facilement, aux problèmes instationnaires.

6.10 Conditions aux limites pour l'équation de correction de pression

Pour les équations de conservation de la quantité de mouvement les conditions aux limites sont traitées comme pour les équations générales de conservation de Φ. Pour l'équation en p' le traitement des conditions aux limites est spécial. Il y a deux types de conditions aux limites pour les équations en p' :

- soit la pression est donnée à la frontière: dans ce cas, on s'arrange pour que $p^* = p_{donnée}$ sur la frontière et donc $p' = 0$ sur la frontière ;
- soit la vitesse normale est donnée à la frontière: dans ce cas, on choisit un volume de contrôle comme à la figure 6.10, et dans l'équation de continuité on ne remplace pas u_e par :

$$u_e = u_e^* + d_e\left(p'_P - p'_E\right),$$

mais on prend la valeur donnée. Il n'y a donc plus de terme $\left(p'_P - p'_E\right)$ dans l'équation de correction de pression, donc il n'y a pas de p'_E. On peut donc poser $a_E = 0$ dans cette équation (à la frontière). *Conclusion générale* : aucune information sur p'_E n'est nécessaire à la frontière.

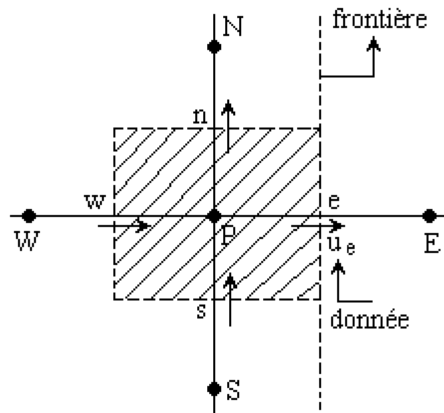


Fig. 6.10 *Volume de contrôle sur la frontière pour l'équation de continuité*

6.11 Commentaires sur les algorithmes SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC et PISO

L'omission des termes de type $\sum a_{vs} u'_{vs}$ dans l'algorithme SIMPLE serait inacceptable si la solution finale obtenue ne satisfaisait pas l'équation de continuité et l'équation de conservation de la quantité de mouvement, mais ce n'est jamais le cas.

D'une manière générale, n'importe quelle expression pour p' est valable tant que la solution finale (le champ de vitesses) est correcte, en effet lorsque l'algorithme converge $p' \to 0$ et donc $p^* \to p$.

La rapidité de convergence de l'algorithme SIMPLE va dépendre de l'expression de p'. Si trop de termes sont négligés, l'algorithme peut diverger.

La “source de masse” b dans l’équation pour $p^{'}$ peut servir d’indicateur de convergence de l’algorithme SIMPLE: lorsqu’on tend vers la solution, b doit s’annuler partout.

Si les corrections de pression sont trop rapides l’algorithme SIMPLE peut diverger. Le remède est l’utilisation de la sous-relaxation.

Dans l’algorithme SIMPLE on part d’un champ de pression donnée (qui est ensuite corrigée approximativement) alors que dans SIMPLER, on part d’un champ de vitesses donné (vérifiant l’équation de continuité) et on en déduit le champ de pression associé. Conclusion : on a besoin de moins d’itérations pour converger avec SIMPLER qu’avec SIMPLE.

Même si on a besoin de plus d’opérations élémentaires dans SIMPLER, finalement, on peut tirer la conclusion que SIMPLER converge plus vite que SIMPLE.

Les conditions aux limites pour l’équation de pression se traitent comme pour l’équation de correction de pression.

Les algoritmes SIMPLEC et PISO sont aussi bien efficaces que SIMPLER mais il n’est pas clair dans quelles conditions ces algorithmes sont meilleurs que SIMPLER. La performance de chaque algorithme dépend des conditions d’écoulement et du degré de couplage entre les équations de conservation de la quantité de mouvement et l’équation de transport de la variable Φ. Dans l’algorithme PISO on ajoute une correction supplémentaire pour améliorer la performance sur chaque itération. L’algorithme SIMPLER est utilisé par défaut dans les logiciels commerciaux pour le calcul de la dynamique des fluides (par exemple FLUENT, http://savas.shef.ac.uk/home/software/fluent)

Annexe A

Précision de la modélisation numérique

Dans le chapitre 1 on a utilisé un profil linéaire de la température pour calculer les gradients ($(\partial T/\partial x)$, $(\partial T/\partial y)$, etc) aux interfaces du volume de contrôle. Aux exemples traités au chapitre 4 on a constaté que par le raffinement du maillage la précision de la solution peut être améliorée. Le raffinement du maillage est le principal outil dont nous disposons pour améliorer la précision de la solution. Le raffinement du maillage peut continuer jusqu'au moment où on ne constate plus une amélioration significative de la précision. On démontre ci-après les fondements de cette méthode et on compare l'ordre de précision des différents schémas comme une mésure de leurs efficacités.

On considère un maillage uniforme de la figure A.1.

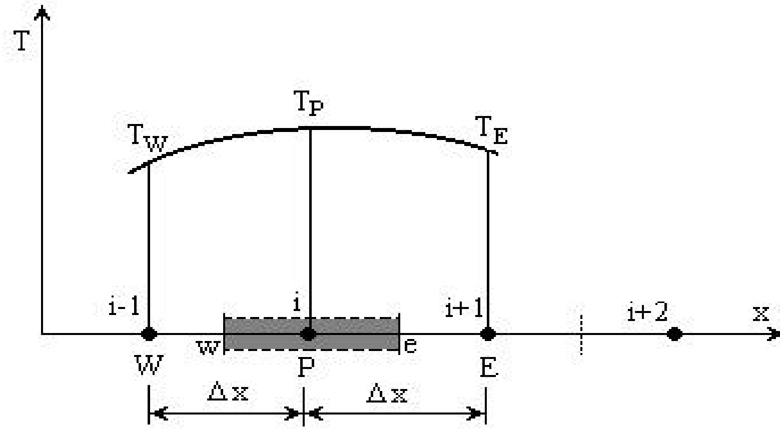


Fig. *A1*

Pour une fonction $T(x)$ le développement en série Taylor de $T(x+\Delta x)$ autour du point i jusqu'à x est :

$$T(x+\Delta x) = T(x) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x \frac{\Delta x^2}{2} + \cdots. \tag{A.1}$$

Par la suite on utilise les valeurs discrets de T_P et T_E pour $T(x)$ et $T(x+\Delta x)$ respectivement. L'équation (A.1) peut être écrite ainsi :

$$T_E = T_P + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_P \frac{\Delta x^2}{2} + \cdots. \tag{A.2}$$

De l'équation (A.2) en résulte l'expression du gradient au point P :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_P \frac{\Delta x}{2}, \tag{A.3}$$

ou

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + \textit{terme tronqué}\,. \tag{A.4}$$

En négligeant le terme tronqué qui multiplie Δx, le gradient au point P peut être écrit ainsi :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P \approx \frac{T_E - T_P}{\Delta x}\,. \tag{A.5}$$

L'erreur impliquée dans l'approximation (A.5) est due à la négligence du terme tronqué. La formule (A.3) suggère que l'erreur de troncature peut étre réduite par la diminution du pas Δx. En général le terme tronqué au schéma aux différences finis contient le facteur Δx^n. L'exposante n du pas Δx détermine le taux avec lequel l'erreur tend vers la valeur zéro au fur à mesure que le maillage est raffiné et s'appelle l'ordre d'approximation de la différence. Ainsi, l'équation (A.5) est de premier ordre en Δx et s'écrit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} + O(\Delta x)\,. \tag{A.6}$$

La formule (A.6) s'appelle *la formule aux différences progressives* par rapport au point P. De même, on peut obtenir la formule aux différences régressives pour $(\partial T / \partial x)_P$ à partir du développement, en série Taylor, suivant :

$$T(x - \Delta x) = T(x) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots. \tag{A.7}$$

De la même façon, comme pour la formule aux différences progressives, on peut obtenir *la formule aux différences régressives* pour le gradient au point P :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = \frac{T_P - T_W}{\Delta x} + O(\Delta x)\,. \tag{A.8}$$

Les équations (A.7) et (A.8) sont de premier ordre comme précisions. Tant pour la formule aux différences progressives que pour la formule aux différences régressive on utilise les valeurs des deux point seulement.

Par soustraction de l'équation (A.7) de l'équation (A.1) on obtient :

$$T(x + \Delta x) - T(x - \Delta x) = 2\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_P \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots. \tag{A.9}$$

On obtient ainsi la troisième formule pour $(\partial T / \partial x)_P$ à partir de l'équation (A.9) :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_P = \frac{T_E - T_W}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{A.10}$$

La formule (A.10) s'appelle *la formule aux différences centrales* qui est une formule de deuxième ordre en précision. La dépendance quadratique de l'erreur en fonction du pas du maillage détermine une diminution plus rapide de l'erreur quand le maillage est raffiné par rapport aux schémas du premier ordre.

La précision peut être augmentée en utilisant un schéma de troisième ordre, comme par exemple le schéma QUICK (the **Q**uadratic **U**pstream **I**nterpolation for **C**onvective **K**inetics). Le schéma aux différences QUICK utilise les valeurs pondérées des trois points pour calculer la valeur de T_e à l'interface "e" :

$$T_e = \frac{3}{8} T_E + \frac{6}{8} T_P - \frac{1}{8} T_W . \qquad \text{(A.11)}$$

Le développement en série Taylor autour de l'interface "e" donne :

$$T_E = T_e + \left(\frac{1}{2}\Delta x\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_e + O\left(\Delta x^3\right) ; \qquad \text{(A.12)}$$

$$T_P = T_e - \left(\frac{1}{2}\Delta x\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\Delta x\right)^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_e + O\left(\Delta x^3\right) ; \qquad \text{(A.13)}$$

$$T_W = T_e - \left(\frac{3}{2}\Delta x\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e + \frac{1}{2!}\left(-\frac{3}{2}\Delta x\right)^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_e + O\left(\Delta x^3\right). \qquad \text{(A.14)}$$

Si on fait le somme pondéré des équations ci-dessus,

$3/8 \text{ x } (A.12) + 6/8 \text{ x } (A.13) - 1/8 \text{ x } (A.14)$,

on obtient :

$$\frac{3}{8} T_E + \frac{6}{8} T_P - \frac{1}{8} T_W = T_e + O\left(\Delta x^3\right). \qquad \text{(A.15)}$$

Le schéma aux différences QUICK est un schéma de troisième ordre en précision.

Annexe B

Algorithme de Thomas et son application

Cet algorithme permet de calculer la solution d'un système algébrique linéaire lorsque la matrice est tridiagonale. C'est notre cas, car les équations discrétisées dans le système linéaire s'écrivent sous la forme tridiagonale :

$$\begin{aligned}
&T_1 &= d_1\\
&-c_2T_1 + a_2T_2 - b_2T_3 &= d_2\\
&\quad -c_3T_2 + a_3T_3 - b_3T_4 &= d_3\\
&\qquad -c_4T_3 + a_4T_4 - b_4T_5 &= d_4\\
&\qquad\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . &=.\ .\\
&\qquad\qquad -c_nT_{n-1} + a_nT_n - b_nT_{n+1} &= d_n\\
&\qquad\qquad\qquad T_{n+1} &= d_{n+1}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Dans le système d'équations (1) T_1 et T_{n+1} sont des valeurs connues sur les frontières du domaine de calcul. La forme générale pour une seule équation est :

$$-c_iT_{i-1} + a_iT_i - b_iT_{i+1} = d_i. \tag{B.2}$$

Le système d'équations (A.1) (sauf la première et la dernière équation) peut être réécrit ainsi :

$$T_2 = \frac{b_2}{a_2}T_3 + \frac{c_2}{a_2}T_1 + \frac{d_2}{a_2}\ ; \tag{B.3.a}$$

$$T_3 = \frac{b_3}{a_3}T_4 + \frac{c_3}{a_3}T_2 + \frac{d_3}{a_3}\ ; \tag{B3.b}$$

$$T_4 = \frac{b_4}{a_4}T_5 + \frac{c_4}{a_4}T_3 + \frac{d_4}{a_4}\ ; \tag{B.3.c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

$$T_n = \frac{b_n}{a_n}T_{n+1} + \frac{c_n}{a_n}T_{n-1} + \frac{d_n}{a_n}.$$

Ces équations peuvent être résolues par *élimination en avant* et *substitution en arrière*. Le processus *d'élimination en avant* commence par la substitution de T_2 dans l'équation (B.3.b) avec l'expression de T_2 de l'équation (B.3.a) et on obtient :

$$T_3 = \left(\frac{b_3}{a_3 - c_3\dfrac{b_2}{a_2}}\right)T_4 + \left(\frac{c_3\left(\dfrac{c_2}{a_2}T_1 + \dfrac{d_2}{a_2}\right) + d_3}{a_3 - c_3\dfrac{b_2}{a_2}}\right) \tag{B.4}$$

Si l'on note :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{c_2}{a_2} T_1 + \frac{d_2}{a_2}, \tag{B. 5}$$

l'équation (B.4) peut être réécrite ainsi :

$$T_3 = \left(\frac{b_3}{a_3 - c_3 P_2} \right) T_4 + \left(\frac{c_3 Q_2 + d_3}{a_3 - c_3 P_2} \right). \tag{B.6}$$

Si l'on note encore :

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3 - c_3 P_2} \qquad \text{et} \qquad Q_3 = \frac{c_3 Q_2 + d_3}{a_3 - c_3 P_2}.$$

L'équation (B.6) peut être écrite ainsi :

$$T_3 = P_3 T_4 + Q_3. \tag{B.7}$$

La formule (B.7) peut être utilisée pour eliminer T_3 de l'équation (B.3.c) et la procédure peut être répétée jusqu'à la dernière équation. Celle-ci constitue la procédure d'élimination en avant.
Pour la procédure d'élimination en arrière on utilise la relation de récurrence (B.7) :

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i, \tag{B.8}$$

où $$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \qquad \text{et} \qquad Q_i = \frac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}}. \tag{B.8.a}$$

La formule (B.8) peut être utilisée également pour les points de frontières 1 et $n+1$ si on pose les suivantes valeurs pour P et Q :

$$P_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad Q_1 = T_1 \tag{B.8b}$$

$$P_{n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad Q_{n+11} = T_{n+1} \tag{B.8c}$$

Pour résoudre un système d'équations, celui-ci doit être arrangé sous la forme générale (B.1) et alors les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i sont identifiés. Les valeurs des P_i et Q_i sont successivement calculées de $i = 2$ à n en utilisant les formules (B.8.a). Une fois la valeur de T connue dans le point de frontière $(n+1)$ les valeurs de T_i peuvent être calculées dans l'ordre inverse (T_n, T_{n-1}, T_{n-2}, ..., T_2) à l'aide de la formule de récurrence (B.8).

Dans la description de l'algorithme ci-dessus on a supposé que les valeurs de frontière T_1 et T_{n+1} sont connues. Pour prendre en compte une condition à la limite de type Neumann (ou densité de flux imposé), par exemple dans le point $i = 1$, le coefficient $c_2 = 0$ dans la deuxième équation du système (B.1) et le flux imposé passe comme source dans le terme-source d_2.

Exemple d'application

On considère l'exemple 3 où le sistème d'équations à résoudre a été le suivant :

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \tag{B.9}$$

La forme générale de l'équation utilisée dans l'algorithme Thomas est :

$$-c_i T_{i-1} + a_i T_i - b_i T_{i+1} = d_i \,.$$

Les noeuds 1 et 6 sont des noeuds de frontière et donc on pose $c_1 = 0$ et $b_6 = 0$. La température à la frontière n'est pas utilisée. La condition à la frontière est prise en compte dans le calcul du terme source d_i.

Pour comprendre mieux l'application du TDMA, les valeurs des coefficients b, c, a et d sont tabulées, pour chaque point du maillage, dans le tableau ci-dessous et aussi les valeurs de P_i et Q_i calculées à l'aide des formules de récurrence (B.8.a).

Tableau B.1

Point	c_i	a_i	b_i	d_i	P_i	Q_i
1	0	15	5	600	0.3333	40.0000
2	5	15	5	100	0.3749	22.4997
3	5	15	5	100	0.3809	16.1897
4	5	15	5	100	0.3818	13.8177
5	5	7.5	0	50	0.000	21.3000

Exemple de calcul

$P_i = \dfrac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$	$Q_i = \dfrac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}}$
$P_1 = \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{5}{15} = 0.3333$	$Q_1 = \dfrac{c_1 Q_0 + d_1}{a_1 - c_1 P_0} = \dfrac{0 + 600}{15 - 0} = 40$
$P_2 = \dfrac{b_2}{a_2 - c_2 P_1} = \dfrac{5}{15 - 5 \cdot 0.3333} = 0.3749$	$Q_2 = \dfrac{c_2 Q_1 + d_2}{a_2 - c_2 P_1} = \dfrac{5 \cdot 40 + 100}{15 - 5 \cdot 0.3333} = 22.4997$
$P_3 = \dfrac{b_3}{a_3 - c_3 P_2} = \dfrac{5}{15 - 5 \cdot 0.3749} = 0.38093$	$Q_3 = \dfrac{c_3 Q_2 + d_3}{a_3 - c_3 P_2} = \dfrac{5 \cdot 22.4997 + 100}{15 - 5 \cdot 0.3749} = 16.1897$
$P_4 = \dfrac{b_4}{a_4 - c_4 P_3} = \dfrac{5}{15 - 5 \cdot 0.38093} = 0.3818$	$Q_4 = \dfrac{c_4 Q_3 + d_4}{a_4 - c_4 P_3} = \dfrac{5 \cdot 16.1897 + 100}{15 - 5 \cdot 0.38093} = 13.8177$
$P_5 = \dfrac{b_5}{a_5 - c_5 P_4} = \dfrac{0}{7.5 - 5 \cdot 0.3818} = 0$	$Q_5 = \dfrac{c_5 Q_4 + d_5}{a_5 - c_5 P_4} = \dfrac{5 \cdot 13.8177 + 50}{7.5 - 5 \cdot 0.3818} = 21.3$

La solution est obtenue par la formule de substitution en arrière (B.8) qui donne :

$$T_5 = P_5T_6 + Q_5 = 0 + 21.30 = 21.30 \;;$$
$$T_4 = P_4T_5 + Q_4 = 0.3818 \cdot 21.30 + 13.8177 = 21.95 \;;$$
$$T_3 = P_3T_4 + Q_3 = 0.38093 \cdot 21.95 + 16.1897 = 24.55 \;; \qquad \text{(B.10)}$$
$$T_2 = P_2T_3 + Q_2 = 0.3749 \cdot 24.55 + 22.4997 = 31.70 \;;$$
$$T_1 = P_1T_2 + Q_1 = 0.3333 \cdot 31.7 + 40 = 50.56 \;.$$

En effet les inconnues T_5, T_4, T_3, T_2 et T_1 correspondent aux inconnues T_6, T_5, T_4, T_3 et T_2, respectivement du système (B.9).

Sous-programme en FORTRAN pour la résolution d'un systeme d'équations tridiagonale

```
      SUBROUTINE TRIDAG (a, b, c, r, u, n)
      PARAMETER (NMAX = 200000)
      INTEGER j
      DOUBLE PRECISION a (n), b (n), c (n), r (n), u (n)
      DOUBLE PRECISION bet, gam (NMAX)
c------a = diagonale inférieure
c------b = diagonale principale
c------c = diagonale supérieure
c------r = le terme de la partie droite
c------u = le terme inconnu
c------n = longueur de la diagonale (la dimension du système)
c------NMAX = le nombre maximal d'équations à résoudre
      if (b (1) .eq. 0.)pause 'tridag: rewrite equations !'
      bet = b (1)
      u (1) = r (1) / bet
c------Décomposition et substitution en avante
      DO j = 2, n
         gam (j) = c (j-1) / bet
         bet = b (j) – a (j)*gam (j)
         if (bet .eq. 0.) pause 'tridag failed'
         u (j) = (r (j) – a (j)*u (j-1)) / bet
      ENDDO
c------Substitution en arrière
      DO j = n-1, 1, -1
         u (j) = u (j) – gam (j+1)*u (j+1)
      ENDDO
      RETURN
      END
```

Annexe C

Maillage non uniforme

Pour la simplicité de la présentation, dans les exemples traités, on a utilisé un maillage uniforme. Cependant, à l'obtention des équations discrétisées au chapitre 4 on a utilisé les dimensions géométriques générales, comme, dx_{WP}, dx_{PE}, etc., valables pour un maillage non-uniforme. Pour un maillage non uniforme, les interfaces "e' et "w" d'un quelconque noeud ne sont pas situées à mi-distance entre les noeuds W et P et les noeuds E et P respectivement. Dans ce cas les valeurs de la diffusion aux interfaces du volume de contrôle sont calculées ainsi :

$$\Gamma_w = (1 - f_W)\Gamma_w + f_W \Gamma_P , \tag{C.1}$$

où le facteur d'interpolation f_w est donné par la formule :

$$f_W = \frac{\delta x_{Ww}}{\delta x_{Ww} + \delta x_{wP}} , \tag{C.2}$$

et

$$\Gamma_e = (1 - f_P)\Gamma_P + f_P \Gamma_E , \tag{C.3}$$

où :

$$f_P = \frac{\delta x_{Pe}}{\delta x_{Pe} + \delta x_{eE}} . \tag{C.4}$$

Pour un maillage uniforme, $f_w = 0.5$, $f_P = 0.5$ et alors $\Gamma_w = (\Gamma_W + \Gamma_P)/2$ et $\Gamma_e = (\Gamma_P + \Gamma_E)/2$. En principe, il y a deux pratiques de localiser les interfaces du volume de contrôle dans un maillage non uniforme (Patankar, 1980) [50].

Pratique A

Tout d'abord on définit les noeuds du maillage et puis on localise les interfaces à mi-distance entre les noeuds du maillage. Cette technique est illustrée à la figure C.1.

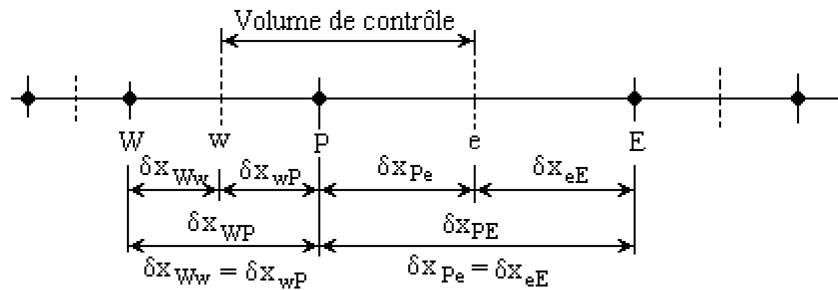


Fig. *C1 Pratique A.*

Pratique B

Dans ce cas, tout d'abord on définit les points des interfaces du volume de contrôle et puis les noeuds du maillage sont placés au centre du volume de contrôle. Cette pratique est illustrée à la figure C2.

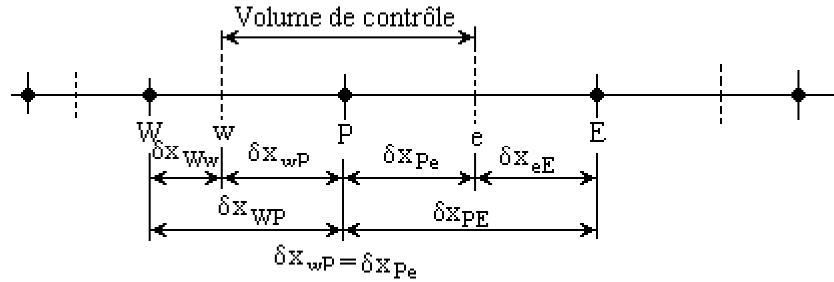


Fig. C2 *Pratique B.*

Dans cette pratique les interfaces du volume de contrôle ne sont pas situées à mi-distance entre les noeuds du maillage. L'évaluation des gradients, aux interfaces, par une interpolation linéaire n'est pas affectée parce que le gradient reste le même dans n'importe quelle position entre les noeuds, mais les valeurs du coefficient de diffusion doivent être calculées par interpolation.

Il est très important de préciser que la formule aux différences centrales pour calculer les gradients aux interfaces est du deuxième ordre en précision et le schéma QUICK pour le calcul du flux convectif est du troisième ordre en précision quand les interfaces du volume de contrôle se trouvent à mi-distance entre les noeuds.

Dans la pratique A une interface, par exemple "e", est située à mi-distance entre les noeuds P et E, donc la formule, aux différences, utilisée pour calculer le gradient $(\partial\Phi / \partial x)_e$ est du deuxième ordre en précision. Un autre avantage de la pratique A est que les valeurs de la diffusion Γ_e, Γ_w, etc. peuvent facilement être calculées en prenant les valeurs moyennes. Le désavantage de la pratique A est que la valeur de la variable dépendante Φ dans le point P n'est pas la plus représentative pour le volume de contrôle, à cause du fait que le point P n'est pas situé au centre du volume de contrôle.

Dans la pratique B, la valeur de Φ dans le point P est représentative pour le volume de contrôle parce que le point P est situé au centre du volume de contrôle, mais les schémas de discrétisation détermine la diminution de la précision. Plus de détails en ce sens on trouve à la référence [50].

Annexe D

Surrelaxation et sous-relaxation

Dans les méthodes itératives, que ce soit pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, ou pour les schémas itératifs permettant d'appréhender les non-linéarités, souvent on veut ralentir ou accélérer, d'une itération à l'autre, les variation de la variable Φ considérée. Ces processus sont appelés respectivement *sous-relaxation (ralentit)* et *surrelaxation (accélère)*.

La surrelaxation est souvent utilisée avec la méthode de Gauss-Seidel, la méthode obtenue s'appelle alors SOR (Successive Over-Relaxation) et très peu utilisée avec la méthode ligne par ligne.

La sous-relaxation est très pratique pour les problèmes non-linéaires car permet d'éviter la divergence des méthodes itératives utilisées pour les résoudre.

Une des nombreuses méthodes de relaxation est celle consistant à utiliser un facteur de relaxation a . Soit l'équation discrétisée suivante :

$$a_P T_P = \sum a_{vs} T_{vs} + b \quad \Rightarrow \quad T_P = \frac{\sum a_{vs} T_{vs} + b}{a_P}. \tag{D.1}$$

Si T_P^* est la valeur à l'itération précédente alors la relation (D.1) peut être écrite ainsi :

$$T_P = T_P^* + \left(\frac{\sum a_{vs} T_{vs} + b}{a_P} - T_P^* \right), \tag{D.2}$$

où la parenthèse représente la variation de T_P au cours de la présente itération. Cette variation peut être atténuée ou augmentée en introduisant le facteur a et en jouant sur sa valeur :

$$T_P = T_P^* + \alpha \left(\frac{\sum a_{vs} T_{vs} + b}{a_P} - T_P^* \right). \tag{D.3}$$

La relation (D.3) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{a_P}{\alpha} T_P = \sum a_{vs} T_{vs} + b + (1 - \alpha) \frac{a_P}{\alpha} T_P^*. \tag{D.4}$$

Si

$0 < a < 1 \quad \Rightarrow$ sous - relaxation
$1 < a < 2 \quad \Rightarrow$ surrelaxation

Remarques

1. À la convergence de l'algorithme $T_P = T_P^*$ et on vérifie l'équation de départ (D.1) et ce pour n'importe quelle valeur de a .
2. Lorsque $a \to 0$, d'une itération à l'autre, les variation de T sont très lentes.

3. Il n'y a pas de règle générale pour choisir la valeur optimale de a. Cette valeur va dépendre de:
   - la nature du problème (non-linéarités, etc) ;
   - le nombre de noeuds du maillage ;
   - la méthode itérative utilisée.

   Seule l'expérience numérique en faisant plusieurs tests pour un problème donné pourra permettre de dégager une valeur optimale entre assurer la convergence et augmenter sa vitesse.
4. Il est possible (mais pas très facile) de changer de facteur de relaxation a d'un point à l'autre du maillage et au cours des itérations.
5. Il existe d'autres méthodes de relaxation, par exemple, celle avec un facteur d'inertie i :

$$(a_P + i)T_P = \sum a_{vs}T_{vs} + b + iT_P^* \; ; \qquad \text{(D.5)}$$

$i < 0 \quad \Rightarrow \quad$ surrelaxation ;

$i > 0 \quad \Rightarrow \quad$ sous - relaxation.

Annexe E

Erreurs de la solution numérique

À la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, discrétisées par la méthode des différences finies, les erreurs apparaissent dans le processus de discrétisation ainsi que pendant la résolution numérique du système d'équations algébriques à l'aide d'un ordinateur.Ces erreurs peuvent être classifiées comme *erreurs de troncature, de discrétisation (ou de méthode), et d'arrondissement.*

L'erreur d'arrondissement est provoquée par l'arrondissement des nombres par l'ordinateur pendant le processus de résolution.

L'erreur de discrétisation est causée par remplacement du problème continuu, satisfait par l'équation aux dérivées partielles, par un problème discret satisfait par l'approximation aux différences finies, y compris les contributions de l'équation et de conditions aux limites, mais sans les erreurs d'arrondissement.

Soit, par exemple, l'équation de conduction thermique 2D stationnaire :

$$L(T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,, \tag{E.1}$$

et l'approximation par différences finies (l'équation discrétisée) donnée par :

$$L_{DF}(T) \equiv \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\,. \tag{E.2}$$

L'équation (E2) peut être résolue sur un certain domaine et avec les conditions aux limites précisées. Si l'équation de conduction thermique (E1) est résolue de façon exacte et on compare cette solution avec la solution numérique sans les erreurs d'arrondissement on constate que les deux solutions ne sont pas égales. La différence est appelée *l'erreur de discrétisation* causée par les erreurs de troncature associées à l'approximation aux différences finies de l'équation différentielle et aux conditions aux limites du problème.
La terminologie de l'erreur de troncature est utilisée pour identifier l'erreur résultant de la discrétisation de l'équation différentielle seulement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{Solution exacte}\\ \text{de l'EDP}\end{pmatrix}}_{\text{L(T)}} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Solution de l'équation discrétisée}\\ \text{sans les erreurs d'arrondissement}\end{pmatrix}}_{\text{L}_{\text{DF}}(T)} = \underbrace{\left(\text{L'erreur de troncation}\right)}_{\text{ET}}. \tag{E.3}$$

L'erreur de troncature est la différence entre la solution exacte de l'EDP et la solution de l'équation aux différences finies sans les erreurs d'arrondissement. L'erreur de troncation est une mesure de la précision d'approximation de l'EDP par l'équation aux différences finies. *L'erreur totale* est la somme entre l'erreur de troncature et l'erreur d'arrondissement. L'erreur de discrétisation croît avec l'augmentation du pas du maillage tandis que l'erreur d'arrondissement décroît avec l'augmentation du pas du maillage. Par conséquent, on constate que l'erreur totale présente un minimum pendant si la finesse du maillage croît.

L'erreur est définie comme la différence entre *la valeur exacte* de la variable et *la valeur approximative (numérique)* de la variable. *L'erreur absolue*, de la variable x peut

donc être écrite ainsi :

$$er_x = x - x^*, \tag{E.4}$$

où x est la valeur exacte de la variable et x^* est l'approximation numérique. Mais d'habitude la valeur exacte n'est pas connue et alors on utilise une estimation supérieure de l'erreur.

Un autre moyen de caractériser l'écart entre la valeur exacte et son approximation numérique est *l'erreur relative* définie comme le rapport entre l'erreur absolue et la valeur approximative. Mais il est plus raisonnable de définir l'erreur relative comme le rapport entre l'erreur absolue de la variable et sa valeur exacte :

$$err_x = \frac{er_x}{x}. \tag{E.5}$$

Pour bien apprécier l'erreur relative il est préférable de l'exprimer en pourcentages :

$$err_x\,\% = \frac{er_x}{x} \cdot 100 \cong \frac{er_x}{x^*} \cdot 100. \tag{E.6}$$

Pour comparer la solution numérique avec la solution analytique sur un domaine de calcul on détermine la norme de l'erreur euclidienne absolue et relative et aussi la norme de l'erreur Cebychev absolue et relative. *La norme de l'erreur euclidienne absolue* est donnée par la relation suivante :

$$er_E = \sqrt{\sum \left[T(x,y) - T_{i,j}\right]^2}, \tag{E.7}$$

où $T(x,y)$ est la valeur calculée par la méthode analytique et $T_{i,j}$ la solution numérique calculée pour le même noeud.

La norme de l'erreur euclidienne relative est determinée par la relation suivante :

$$err_E = \sqrt{\frac{\sum \left[T(x,y) - T_{i,j}\right]^2}{\sum T^2(x,y)}}. \tag{E.8}$$

La norme de l'erreur absolue dans le sens de Cebychev peut être calculée par la relation :

$$er_C = \max\left|T(x,y) - T_{i,j}\right|, \tag{E.9}$$

avec i, j pour tous les noeuds du maillage.

La norme de l'erreur relative dans le sens de Cebychev est donnée par la relation :

$$err_C = \frac{er_C}{\max\left|T(x,y)\right|}. \tag{E.10}$$

Annexe F

Le coefficient de convection

Le coefficient de convection est déterminé si le flux de chaleur et le profil de température (T_∞ et T_p) sont connus.En général, il est déterminé par un coefficient d'échange adimensionnel appelé *le nombre de Nusselt* (Nu) :

$$Nu = \frac{hL}{\lambda_{fluide}}, \quad \text{(F.1)}$$

où L est la longueur caractéristique de la paroi prise dans le sens de l'écoulement (m) et λ_{fluide} le coefficient de conduction dans le fluide.

Le nombre de Nusselt est donné par une loi empirique qui dépend de la forme de la paroi et du régime d'écoulement. Il y a deux régimes d'écoulement:

- Écoulement laminaire, quand les filets de fluid restent parallèles à la paroi;
- Écoulement turbulent, quand les particules sont en mouvements désordonnées mais la direction générale de l'écoulement est conservée.

On utilise comme indicateur de régime le nombre sans dimension de Reynolds (qui exprime le rapport entre la force d'inertie et la force de viscisité) qui pour une paroi cylindrique se met sous la forme :

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu}, \quad \text{(F.2)}$$

où v est la vitesse du fluide (m/s), D est le diamètre du cylindre (m) et n est la viscosité du fluide (m^2 / s).

Pour un corps cylindrique, le nombre de Nusselt peut se mettre sous la forme :

$$Nu = a + b \cdot \mathrm{Re}^n, \quad \text{(F.3)}$$

où les coefficients a, b et n sont donnés au tableau F-1.

Tableau F-1

Type d'écoulement	**Rang de** Re	**a**	**b**	**N**
Laminaire	0.1 à 1000	0.32	0.43	0.52
Turbulent	1000 à 50000	0	0.24	0.6

Pour une meilleure compréhension du phénomène de convection naturelle, on considère une plaque chaude (froide) placée verticalement dans un fluide de température inférieure (supérieure) à la température de la plaque. Pendant le transfert de chaleur qui se fait en premier lieu par conduction à travers le fluide, il apparaît un gradient de température qui s'établit dans celui-ci. La variation de température dans le fluide génère un gradient de densité qui fait apparaître une force dit "force gravifique". Si la température de la paroi est suffisante, cette force sera supérieure à la force de frottement (entre le fluide-paroi et entre fluide-fluide).

Ceci entraînera un mouvement ascensionnel (descendant) du fluide. Ce mouvement de convection est appelé convection naturelle. La vitesse du fluide ainsi que le coefficient de convection est beaucoup plus faible qu'en convection forcée.

Dans la convection, l'écoulement du fluide ainsi que le gradient de température développent respectivement sur la paroi une couche limite mécanique (d) et une couche limite thermique (δ_t) (la couche limite est la région du fluide dont la température est affectée par la présence de la paroi. Cette couche est théoriquement infinie mais on limite sa profondeur de distance à la paroi à laquelle l'écart de température fluide-paroi vaut 99% de l'écart maximum ($T_p - T_\infty$)). Pour un fluide gazeux, $\delta = \delta_t$. Dans le cas d'une convectionnaturelle, la vitesse du fluide est nulle sur la plaque et au large de cette couche. Elle possède un maximum à $d/3$.

Le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) dépend de la grandeur du gradient de température. Ce régime est déterminé par un nombre adimensionnel appelé le nombre de Grashof (Gr). Celui-ci représente le rapport entre la force gravifique et la force de viscosité. Il est similaire au nombre de Reynolds en convection forcée :

$$Gr = \frac{g\beta L^3 \left(T_p - T_\infty\right)}{\nu^2}, \qquad \text{(F.4)}$$

où g - l'accélération de la pesanteur (m/s^2) ;

b - le coefficient d'expansion (K^{-1}) ;

L - la longueur caractéristique de la paroi dans le sens de l'écoulement (m) ;

T_p - la température de la paroi (K) ;

T_∞ - la température du fluide (au large de la paroi) (K) ;

n - la viscosité du fluide (m^2/s) ;

En toute généralité le nombre de Nusselt est fonction de :

$$Nu = f(Ra), \qquad \text{(F.5)}$$

où Ra est un nombre adimensionnel appelé *le nombre de Rayleigh* défini comme :

$$Ra = \Pr \cdot Gr, \qquad \text{(F.6)}$$

avec Gr *le nombre de Grashof* et $\Pr$ aussi un nombre adimensionnel appelé *le nombre de Prandtl :*

$$\Pr = \frac{n}{a}, \qquad \text{(F.7)}$$

où n est la viscosité du milieu (m^2/s) et a est la diffusivité thermique (m^2/s).
Le nombre $\Pr$ quantifie l'importance relative des couches limites mécaniques et thermiques. Pour des gaz (tel que l'air), $\Pr \cong 1$ les couches limites thermiques et mécaniques sont équivalentes ($\delta = \delta_t$). Le nombre de Rayleigh s'écrit ainsi :

$$Ra = \frac{g\beta \Delta T L^3}{\alpha\nu}. \qquad \text{(F.8)}$$

L'expression de Nu moyen pour une paroi cylindrique

Si le diamètre du cylindre est suffisamment important, l'expression du nombre de Nusselt pour une paroi cylindrique sera approchée par celle d'une paroi verticale :

$$\frac{L/D}{(Gr)^{0.25}} < 0.025 \ ; \tag{F.9}$$

$$Nu_m = c(Gr_L \cdot \mathrm{Pr})^n = cRa_L^n, \tag{F.10}$$

où les coefficients c et n sont donnés, pour une plaque verticale à température uniforme, dans le tableau F-2.

Tableau F-2

Type d'écoulement	**Rang de** $Gr_L \cdot \mathrm{Pr}$	**c**	**N**
Laminaire	10^4 à 10^9	0.59	¼
Turbulent	10^9 à 10^{13}	0.1	1/3

L'expression de la couche limite

Pour les gaz ($\mathrm{Pr} = 1$), la couche limite thermique (δ_t) est équivalente à la couche limite mécanique (d) :

$$\delta(x) = \delta_t(x) = 3.93 \cdot (0.952 + \mathrm{Pr})^{0.25} \left(\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{\nu^2} \right)^{-0.25} \cdot \mathrm{Pr}^{-0.5} \cdot x^{0.25}. \tag{F.11}$$

Plus la différence de température $(T_p - T_\infty)$ est importante, plus $d(x)$ diminue.

Équation du profil de température

L'expression approchée du profil de température est donnée par :

$$\frac{T(x,y) - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \tag{F.12}$$

Equation du profil de vitesse

L'expression approchée du profil de vitesse est donnée par :

$$u(x,y) = u_c \frac{y}{\delta}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2, \tag{F.13}$$

où $u_c = \dfrac{g\beta\left|T_p - T_\infty\right|\delta^2}{4\nu}$ (m/s).

Annexe G

Programmes de calcul

G.1 Programme de calcul (l'exemple 2, paragraphe 4.1.7)

program THER1Ds2

```
*==================================================================*
*     RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONDUCTION THERMIQUE 1D          *
*     STATIONNAIRE  ( méthode des volumes finis )                  *
*                                                                  *
*     EQUATION RESOLUE : div (k (grad T)) + S = 0                  *
*                                                                  *
*     VARIABLES D'ENTREE :                                         *
*       LAM    : conductivité thermique                            *
*       NN     : nombre de points du maillage                      *
*       L      : longueur du domaine de calcul                     *
*      TA, TB  : conditions Dirichlet                              *
*                                                                  *
*     CONDITIONS AUX LIMITES                                       *
*       Dirichlet à x = 0 et Dirichlet à x = L                     *
*                                                                  *
*     VARIABLES DE SORTIE :                                        *
*       TEMP  : température T(x)                                   *
*                                                                  *
*     AUTEUR  : I. POPA , Juillet 1999                             *
*                               Copyright © Ioan POPA, 1999        *
*==================================================================*

      PARAMETER (nn = 6)
      DOUBLE PRECISION TEMP1 (nn), AX (nn), TEMP (nn)
      DOUBLE PRECISION A (nn), B (nn), C (nn), WK (nn)
      DOUBLE PRECISION DX, L, TA, TB, LAM
      DATA L/0.02/, lam/0.5/ ,TA/100.0/ ,TB/200.0/ ,S/1.0D6/

c----- calcul du pas dans l'espace (DX)
      DX = L/(nn-1)
      write (*,*)'DX', dx

C--------------INITIALISATION - TEMPERATURES AUX NOEUDS --------------------------
      DO I = 2, nn-1
         temp (i) = 0.01
      ENDDO

C--------------CONDITIONS AUX LIMITES--------------------------------------------------------
         temp (1) = TA
         temp (nn) = TB
         temp1 (1) = TA
         temp1 (nn) = TB

C========= FORMATION DES DIAGONALES ===========================
```

```
c--------- DIAGONALE INFERIEURE (A)-----------------------------------------------------------
      DO i = 2, nn-1
         IF (i .eq. 2) then
            A (i-1) = 0.0
         ELSE
            A (i-1) = - (lam/DX)
         ENDIF
      ENDDO

c---------- DIAGONALE SUPERIEURE -------------------------------------------------------------
      DO i = 2, nn-2
         C (i-1) = - (lam/DX)
      ENDDO
         C (nn-2) = 0.0

c-------------DIAGONALE PRINCIPALE -----------------------------------------------------------
      DO i = 2, nn-1
         B (i-1) = lam/DX + lam/DX
      ENDDO

c------------TERME LIBRE (WK)----------------------------------------------------------------
      DO j = 2, nn-2
         IF (j .eq. 2) then
            wk (j-1) = TA*(lam/DX) + S*DX
         ELSE
            wk (j-1) = S*DX
         ENDIF
      ENDDO
            wk (nn-2) = TB*(lam/DX) + S*DX

c----------RESOUDRE L'EQUATION---------------------------------------------------------------

      CALL TRIDAG (a, b, c, wk, temp, nn-2)

c-----formation du vecteur pour les points de calcul sur "X" ---------------------------------
            AX (1) = 0.0
         DO j = 2, NN
            AX (j) = AX (j-1) + DX
         ENDDO

c---- inclure les points Dirichlet-----------------------------------------------------------
      DO i = 2, nn-1
         temp1 (i)=temp (i-1)
      ENDDO

c-----------ECRIRE la solution---------------------------------------------------------------
       OPEN (20,file = 'SOL1Ds2.prn')
        DO j=1,nn
          write (20,110) AX (j), temp1 (j)
        ENDDO
       CLOSE (20)
110 format (2x, f6.3, 2x, f6.2)
      STOP
```

```
      END
```

Remarque: Le sous-programme TRIDAG est celle présenté à l'annexe B.

G.2 Programme de calcul (l'exemple 3, paragraphe 4.1.7)

program THER1Ds3

```
*==================================================================*
*     RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONDUCTION THERMIQUE 1D          *
*     STATIONNAIRE - (methode des volumes finis)                   *
*                                                                  *
*      EQUATION RESOLUE : (div kA(grad T)) - hP(T-Tinf) = 0        *
*                                                                  *
*      VARIABLES D'ENTRÉE                                          *
*        NN    : nombre de noeuds du maillage                      *
*        L      : longueur du domaine de calcul                    *
*        TB    : condition Dirichlet                               *
*                                                                  *
*        CONDITIONS AUX LIMITES                                    *
*        Dirichlet à x = 0 et Neumann a x = L                      *
*                                                                  *
*        VARIABLES DE SORTIE :                                     *
*        TEMP  : température T(x)                                  *
*                                                                  *
*         AUTEUR  : Ioan POPA, Août 2000                           *
*                                     Copyright © Ioan POPA, 2000  *
*==================================================================*

      PARAMETER (nn = 6)
      DOUBLE PRECISION TEMP (nn), AX (nn), A (nn), B (nn), C (nn)
      DOUBLE PRECISION wk (nn), temp1 (nn)
      DOUBLE PRECISION DX, Tinf, TB, L, SP, an2
      DATA Tinf/20.0/, TB/100.0/, L/1.0/, an2/25.0/

c----- calcul du pas dans l'espace (DX)---------------------------------------------------------------
      DX = L/(NN - 1)
      write (*,*)'DX = ', dx

c---------FORMATION DES VECTEURS DES DIAGONALES ---------------------------------

c---------diagonale inférieure-----------------------------------------------------------------------
          A (1) = 0.0
        DO i = 2, nn-1
          A (i) = - 1.0/DX
        ENDDO

c---------diagonale supérieure-----------------------------------------------------------------------
        DO i = 1, nn-2
          C (i) = - 1.0/DX
        ENDDO
          C (nn-1) = 0.0
c---------diagonale principale-----------------------------------------------------------------------
```

```
SP = - an2*DX
DO i = 1, nn-2
  B (i) = 1.0/DX + 1.0/DX - SP
ENDDO
  B (nn-1) = 1.0/DX - SP/2.0

c---------formation du vecteur du terme libre (wk)----------------------------------------------------
  wk (1) = an2*DX*TINF + (1.0/DX)*TB
do j = 2, nn-2
  wk (j) = an2*DX*TINF
enddo
  wk (nn-1) = an2*DX*TINF/2.0

c---------RESOLUTION DU SYSTEME------------------------------------------------------------

CALL TRIDAG (a, b, c, wk, temp1, nn -1)

c-------formation de la solution finale sur tout le domaine-------------------------------------------

    temp (1) = TB
 do j = 2, nn
    temp (j) = temp1 (j-1)
 enddo

c-----formation du vecteur pour les points de calcul sur "x"-----------------------------------------
    AX (1) = 0.0
 do j = 2, NN
    AX(j) = AX (j-1) + DX
 enddo

c =========== ECRIRE la solution ========================================

 open (20,file = 'SOL1Ds3.prn')
    do j = 1, nn
     write (20,101) ax (j), temp (j)
    enddo
 close(20)
101   format(F5.2, 5x, F7.3)
 STOP
 END
```

G.3 Programme de calcul (l’exemple 2, paragraphe 4.2.5)

program **THER1Di2**

```
*================================================================*
*     RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONDUCTION THERMIQUE 1D           *
*     INSTATIONNAIRE                                                *
*     (méthode des volumes finis, schéma totalement implicite)      *
*                                                                   *
*     EQUATION RESOLUE : DT/dt = alfa (div k(grad T))               *
*                                                                   *
*        VARIABLES D'ENTRÉE :                                       *
*        CON   : conductivité thermique                             *
```

```
*         RHO   : densité de masse                                                   *
*         CP    : chaleur specifique                                                 *
*         NN    : nombre de noeuds du maillage                                       *
*         L     : longueur du domaine de calcul                                      *
*         TI    : température initiale                                               *
*         TC    : condition Dirichlet                                                *
*         NPT   : nombre de pas dans le temps                                        *
*                                                                                    *
*         CONDITIONS AUX LIMITES                                                     *
*       Dirichlet à x = L et Neumann a x = 0                                         *
*                                                                                    *
*------VARIABLES DE SORTIE :                                                         *
*       TEMP  : température T(x,t)                                                   *
*                                                                                    *
*------AUTEUR  : Ioan POPA    Août 2000                                              *
*                                        Copyright © Ioan POPA,2000                  *
*=================================================================*

      PARAMETER (nn = 6, npt = 5)
      DOUBLE PRECISION TEMP(npt+1,nn), AX(nn), A(nn), B(nn), C(nn)
      DOUBLE PRECISION wk(nn), temp1(nn)
      DOUBLE PRECISION DX, ALFA, RCP, TC, TI, L, DT
      DATA  CON/10.0D0/
      DATA RCP/1.0D+07/,TC/0.0/,TI/200.0/,L/0.02/

c----- calcul du pas dans l'espace (DX) -----------------------------------------------------------------
      DX = L/(NN - 1)
      write(*,*)'DX =',dx

c----- calcul de la difusibilite thermique (ALFA) ------------------------------------------------------
      ALFA = CON/RCP
      write(*,*)'alfa =',alfa

c--------le pas dans le temps ------------------------------------------------------------------------------
        DT = 8.0
      write(*,*)'DT = ',DT,' s'

c------initialise la condition Dirichlet (frontière E) ---------------------------------------------------
       DO j = 1,nn
          TEMP(1,j) = TI
       ENDDO

c-----FORMATION DES VECTEURS DES DIAGONALES ----------------------------------------
c---------diagonale inférieure ----------------------------------------------------------------------------
          A(1) = 0.0
        DO I = 2, nn-1
          A(i) = - CON/DX
        ENDDO
c---------diagonale supérieure ----------------------------------------------------------------------------
          C(1) = - CON/DX
        DO I = 2, nn-2
          C(i) = - CON/DX
```

```
      ENDDO
        C(nn-1) = 0.0

c-----formation du vecteur de la diagonale principale ------------------------------------------------
      B(1) = RCP*DX/2.0/DT + CON/DX
      DO i=2,nn-1
        B(i) = RCP*DX/DT + CON/DX + CON/DX
      ENDDO

c-----formation initiale du terme libre (wk)-----------------------------------------------------------
              wk(1) = RCP*DX/2.0/DT*temp(1,1)
              temp1(1) = temp(1,1)
        do j=2,nn-1
              wk(j) = RCP*DX/DT*temp(1,j)
              temp1(j) = temp(1,j)
        enddo
              temp1(nn) = temp(1,nn)

c-------------BOUCLES pour le calcul dans l'espace et dans le temps -------------------------------
     DO i = 1, npt
      CALL TRIDAG (a, b, c, wk, temp1, nn-1)

c----------formation du vecteur "wk" pour le pas suivant dans le temps-----------------------------
              wk(1) = RCP*DX/2.0/DT*temp1(1)
              temp(i+1,1) = temp1(1)
        do j=2, nn-1
              temp(i+1,j) = temp1(j)
              wk(j) = RCP*DX/DT*temp1(j)
        enddo
              temp(i+1,nn) = TC
     ENDDO

c-----formation du vecteur pour les points de calcul sur "x" ------------------------------------------
              AX(1) = 0.0
        do j = 2, NN
              AX(j) = AX(j-1) + DX
        enddo

 c-------ECRIRE la solution ---------------------------------------------------------------------------
open(20, file = 'sol1di2.prn')
        do i=1, npt+1
              write(20 ,*)'# npt=',i-1,'  t=',8.0*(i-1), ' s'
              do j=1,nn
                    write(20,101)1000*ax(j), temp(i,j)
              enddo
        enddo
close(20)

101   format(F5.2, 5x, f7.3)
      STOP
      END
```

G.4 Programme de calcul (l'exemple 1, paragraphe 4.3.2)

program THER2Ds1

```
*=================================================================*
*    RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONDUCTION THERMIQUE 2D           *
*    STATIONNAIRE (méthode des volumes finis)                      *
*                                                                  *
*     EQUATION RESOLUE : (div k(grad T)) = 0                       *
*                                                                  *
*    VARIABLES D'ENTRÉE :                                          *
*      NNX    : nombre de noeuds sur la direction X                *
*      NNY    : nombre de noeuds sur la direction Y                *
*      L      : largueur du domaine de calcul                      *
*      H      : hauteur du domaine de calcul                       *
*      TB     : condition Dirichlet                                *
*                                                                  *
*    CONDITIONS AUX LIMITES  :                                     *
*      Dirichlet suivant la frontière "North" TB(x, H) = 100       *
*      Neumann (flux nul) suivant les frontières "East" et "Sud"   *
*      Flux imposé (q) suivant la frontière "West"                 *
*                                                                  *
*     VARIABLES DE SORTIE :                                        *
*      TEMP  : température T(x,y)                                  *
*                                                                  *
*------AUTEUR  : Ioan POPA    Septembre 2000                       *
*                                   Copyright © Ioan POPA, 2000
*=================================================================*

      PARAMETER (nnx = 21, nny = 26, nit = 25000)
      DOUBLE PRECISION TEMP(nnx, nny), AX(nnx, nny), AY(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION A(nnx, nny), B(nnx, nny), C(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION wk(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION A1(nny), B1(nny), C1(nny), WK1(nny), temp1(nny)
      DOUBLE PRECISION DX, DY, TB, L, H, la, gz, q
      DATA TB/100.0/, L/0.4/, H/0.5/, la/1000.0/, gz/0.01/
      DATA q/500000.0/

c----- calcul du pas dans l'espace (DX) et (DY) ------------------------------------------------------
      DX = L/(NNX - 1)
      DY = H/(NNY - 1)
      write(*,*)'DX =',dx
      write(*,*)'DY =',dy

C--------initialisation de la température ----------------------------------------------------------------
      DO i=1,nnx
         DO j=1,nny
               temp(i,j) = 0.0
         ENDDO
      ENDDO

c---------introduction des conditions aux limites de type DIRICHLET-----------------------------
```

```
c---------------sur la frontière NORTH-------------------------------------------------------------------
      DO i=1,nnx
            temp(i,nny) = TB
      ENDDO

c--- BOUCLE d’ITERATION ---------------------------------------------------------------------------------
      DO k = 1,nit

c-----formation des vecteurs des diagonales---------------------------------------------------------------
      DO i = 1, NNX-1
             IF (i .EQ. 1) THEN

c---------diagonale inférieure ---------------------------------------------------------------------------
                        DO j=1,nny-1
                              if (j .eq. 1) then
                                    A(i,j) = 0.0
                                    A1(j) = A(i,j)
                                    else
                                    A(i,j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                                    A1(j) = A(i,j)
                              endif
                        ENDDO

c---------diagonale supérieure ---------------------------------------------------------------------------
                        DO j = 1, nny-2
                              if (j .eq. 1) then
                                    C(i, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                                    C1(j) = C(i,j)
                              else
                                    C(i,j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                                    C1(j) = C(i, j)
                              endif
                        ENDDO
                                    C(i,nny-1) = 0.0
                                    C1(nny-1) = C(i, nny-1)

c----------diagonale principale --------------------------------------------------------------------------
                        DO j=1,nny-1
                              if (j .eq.1) then
                                    B(i,j) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY
                                    B1(j) =B(i,j)
                             else
                                    B(i,j) = la*(DY*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY + la*(DX/2.0*gz)/DY
                                    B1(j) = B(i,j)
                             endif
                        ENDDO

c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk) --------------------------------------------------
              do j = 1, nny-2
                  if (j .eq. 1) then
                      wk(i,j) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(i+1,j) + DY/2.0*gz*q
                      wk1(j) = wk(i,j)
```

```
                else
                    wk(i,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,j) + DY*gz*q
                    wk1(j) = wk(i,j)
                 endif
            enddo
                    wk(i,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,nny-1) + DY*gz*q +
     *                      (la*(DX/2.0*gz)/DY)*temp(i,nny)
                    wk1(nny-1) = wk(i,nny-1)

c-------------RESOLUTION DU SYSTEME ------------------------------------------------------------
            CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-1)
c-------formation de la solution sur toute la ligne verticale (la ligne d'application du TDMA)--
            do j = 1, nny-1
                    temp(i,j)=temp1(j)
            enddo
           ELSE

c---------diagonale inférieure ------------------------------------------------------------------------------
            DO j = 1, nny-1
                  if (j .eq. 1) then
                    A(i, j) = 0.0
                    A1(j) = A(i, j)
                  else
                    A(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                    A1(j) = A(i,j)
                  endif
            ENDDO

c---------diagonale supérieure ----------------------------------------------------------------------------
            DO j = 1, nny-2
                  if (j .eq. 1) then
                    C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                    C1(j) = C(i,j)
                  else
                    C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                    C1(j) = C(i,j)
                  endif
            ENDDO
                    C(i, nny-1) = 0.0
                    C1(nny-1) = C(i, nny-1)

c----------diagonale principale --------------------------------------------------------------------------
            DO j = 1, nny-1
                 if (j .eq.1) then
                    B(i,j) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DX*gz)/DY
                    B1(j) = B(i,j)
                 else
                    B(i,j)=la*(DY*gz)/DX+la*(DY*gz)/DX+la*(DX*gz)/DY+ la*(DX*gz)/DY
                    B1(j) = B(i,j)
                 endif
            ENDDO
```

```
c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk) -----------------------------------------------
          do j = 1, nny-2
             if (j .eq. 1) then
                wk(i, j) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(i-1,j) +la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(i+1,j)
                wk1(j) = wk(i,j)
             else
                wk(i,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) + (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1, j)
                wk1(j) = wk(i,j)
             endif
          enddo
                wk(i,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1, nny-1) +
   *                  (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1, nny-1) +
   *                  (la*(DX*gz)/DY)*temp(i, nny)
                wk1(nny-1) = wk(i, nny-1)

c-------------RESOLUTION DU SYSTEME ----------------------------------------------------------
          CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-1)
c-------formation de la solution sur toute la ligne vericale -------------------------------------------
          do j = 1, nny-1
          temp(i, j) = temp1(j)
          enddo
         ENDIF
         ENDDO

c=================pour " i = NNX ====================================
c---------diagonale inférieure
          DO j = 1, nny-1
              if (j .eq. 1) then
                A(nnx,j) = 0.0
                A1(j) = A(nnx, j)
              else
                A(nnx, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
          A1(j) = A(nnx, j)
          endif
          ENDDO

c---------diagonale supérieure -------------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-2
               if (j .eq. 1) then
                C(nnx, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                C1(j) = C(nnx,j)
               else
                C(nnx, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                C1(j) = C(nnx, j)
               endif
          ENDDO
                C(nnx, nny-1) = 0.0
                C1(nny-1) = C(nnx, nny-1)

c----------diagonale principale -----------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
              if (j .eq. 1) then
```

```
                B(nnx,j) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY
                B1(j) = B(nnx,j)
              else
                B(nnx,j) = la*(DY*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY +
     *                         la*(DX/2.0*gz)/DY
                B1(j) = B(nnx,j)
              endif
           ENDDO

c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk) ----------------------------------------------
           do j = 1, nny-2
              if (j .eq. 1) then
                wk(nnx,j) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(nnx-1, j)
                wk1(j) = wk(nnx, j)
              else
                wk(nnx,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-1,j)
                wk1(j) = wk(nnx,j)
              endif
           enddo
             wk(nnx,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-1, nny-1) +
     *               (la*(DX/2.0*gz)/DY)*temp(nnx, nny)
             wk1(nny-1) = wk(nnx, nny-1)

c-------------RESOLUTION DU SYSTEME ----------------------------------------------------------
           CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-1)
c-------formation de la solution sur toute la ligne vericale
           do j = 1, nny-1
                temp(i, j) = temp1(j)
           enddo
          ENDDO

c-----formation du vecteur pour les coordonées de calcul sur "x" et "y" ---------------------------
          AX(1,1) = 0.0
          AY(1,1) = 0.0
          do i=1, nnx
                do j=2,nny
                      AY(i,j) = AY(i,j-1) +DY
                enddo
          enddo
          do j=1,nny
                do i = 2,nnx
                      AX(i,j) = AX(i-1,j) + DX
                enddo
          enddo

*=========== ECRIRE la SOLUTION =================================
        OPEN(20, file = 'sol2Ds1.prn')
          do i = 1, nnx, 5
                write(20,101)(temp(i, j), j = 1, nny, 5)
          enddo
        CLOSE(20)
```

```
101   format (26(1x, F6.2))
      STOP
      END
```

G.5 Programme de calcul (l’exemple 2, paragraphe 4.3.2)

program THER2Ds2

```
*=====================================================================*
*    RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONDUCTION THERMIQUE 2D               *
*    STATIONNAIRE  (méthode des volumes finis)                         *
*                                                                      *
*      EQUATION RESOLUE : (div k(grad T)) + S = 0                      *
*      Domaine d'analyse: Réctangle - dimensions L/H                   *
*                                                                      *
*------VARIABLES D'ENTRÉE:                                             *
*        NNX : nombre de noeuds sur la direction X                     *
*        NNY : nombre de noeuds sur la direction Y                     *
*        L      : largueur du domaine de calcul                        *
*        H       : hauteur du domaine de calcul                        *
*        TB    : condition Dirichlet                                   *
*                                                                      *
*------CONDITIONS AUX LIMITES                                          *
*        Dirichlet suivant toutes les frontière (W, E, S, N)           *
*        T(0,y) = 0 ; T(w,y) = 0 ; T(x,0) = 0 ; T(x,h) = 0             *
*                                                                      *
*------VARIABLES DE SORTIE:                                            *
*        TEMP: température T(x,y)                                      *
*                                                                      *
*------AUTEUR: Ioan POPA, Octobre 2000                                 *
*                                      Copyright © 2000, Ioan POPA     *
*=====================================================================*
      PARAMETER ( nnx = 21, nny = 26, nit = 1500)
      DOUBLE PRECISION TEMP(nnx, nny), AX(nnx, nny), AY(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION A(nnx, nny), B(nnx, nny), C(nnx, nny), wk(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION A1(nny), B1(nny), C1(nny), WK1(nny), temp1(nny)
      DOUBLE PRECISION dif(nnx, nny), temp2(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION DX, DY, TB, L, H, la, gz, S, err
      DATA TB/0.0/,L/0.04/,H/0.05/,la/4.0/,gz/1.0/,err/0.001/
      DATA S/40000000.0/

c----- calcul du pas dans l'espace (DX) et (DY) ------------------------------------------------------
      DX = L/(NNX - 1)
      DY = H/(NNY - 1)
      write(*,*)'DX =',dx
      write(*,*)'DY =',dy

C--------initialisation de la température ----------------------------------------------------------------
      DO I = 1, nnx
         DO j = 1, nny
         temp(i,j) = 0.01
         ENDDO
      ENDDO
```

```
c------introduction des conditions aux limites de type Dirichlet--------------------------------------
c---------------frontière NORTH-------------------------------------------------------------------------
     DO i=1,nnx
          temp(i,nny) = TB
     ENDDO
c---------------frontière SOUTH-------------------------------------------------------------------------
     DO i=1,nnx
          temp(i,1) = TB
     ENDDO
c---------------frontière WEST--------------------------------------------------------------------------
     DO j=1,nny
          temp(1,j) = TB
     ENDDO
c---------------frontiere EAST--------------------------------------------------------------------------
     DO j=1,nny
          temp(nnx,j) = TB
     ENDDO

C============== BOUCLE D’TERATION ==================================

     DO k=1,nit

c----------formation des vecteurs des diagonales ------------------------------------------------------
     DO i = 2,NNX-2

        IF (i .EQ. 2) THEN

c---------diagonale inférieure "A"-----------------------------------------------------------------------
            DO j = 2,nny-1
               if (j .eq. 2) then
                  A(i,j) = 0.0
                  A1(j-1) = A(i,j)
               else
                  A(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                  A1(j-1) = A(i,j)
               endif
            ENDDO

c---------diagonale supérieure "C"-----------------------------------------------------------------------
            DO j = 2, nny-2
               if (j .eq. 2) then
                  C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                  C1(j-1) = C(i,j)
               else
                  C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                  C1(j-1) = C(i,j)
               endif
            ENDDO
                  C(i,nny-1) = 0.0
                  C1(nny-2) = C(i,nny-1)

c----------diagonale principale "B" --------------------------------------------------------------------
            DO j=2,nny-1
```

```
            if (j .eq.2) then
                  B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY
                  B1(j-1) =B(i,j)
            else
                  B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY
                  B1(j-1) = B(i,j)
            endif
       ENDDO

c-----------formation initiale du vecteur du terme libre (wk) -----------------------------------------
       do j = 2, nny-2
         if (j .eq. 2) then
           wk(i,j) = (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,j-1) +
     *        (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
     *        (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,j) + S*DX*DY*1.0
           wk1(j-1) = wk(i,j)
         else
           wk(i,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
     *        (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,j) + S*DX*DY*1.0
           wk1(j-1) = wk(i,j)
         endif
       enddo
           wk(i,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,nny-1) +
     *         (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,nny-1) +
     *         S*DX*DY*1.0 +
     *         (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,nny)
           wk1(nny-2) = wk(i,nny-1)

c------------RESOLUTION DU SYSTEME--------------------------------------------------------
       CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-2)

c-------formation de la solution sur toute la ligne verticale------------------------------------------
       do j = 2, nny-1
         temp(i,j) = temp1(j-1)
       enddo

     ELSE

c---------diagonale inférieure "A" -------------------------------------------------------------------
       DO j = 2,nny-1
         if (j .eq. 2) then
           A(i,j) = 0.0
           A1(j-1) = A(i,j)
         else
           A(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
           A1(j-1) = A(i,j)
         endif
       ENDDO

c---------diagonale supérieure "C" --------------------------------------------------------------------
       DO j=2,nny-2
         if (j .eq. 2) then
```

```
              C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
              C1(j-1) = C(i,j)
           else
              C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
              C1(j-1) = C(i,j)
           endif
        ENDDO
              C(i,nny-1) = 0.0
              C1(nny-2) = C(i,nny-1)

c----------diagonale principale "B" ------------------------------------------------------------------
        DO j = 2,nny-1
           if (j .eq.2) then
              B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY
              B1(j-1) = B(i,j)
           else
              B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY
              B1(j-1) = B(i,j)
           endif
        ENDDO

c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk) -----------------------------------------------
        do j = 2,nny-2
          if (j .eq. 2) then
            wk(i,j) = (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,j-1) +
     *               (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
     *               (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,j) + S*DX*DY*1.0
            wk1(j-1) = wk(i,j)
          else
            wk(i,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
     *               (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,j) + S*DX*DY*1.0
            wk1(j-1) = wk(i,j)
          endif
        enddo
        wk(i,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,nny-1) +
     *              (la*(DY*gz)/DX)*temp(i+1,nny-1) +
     *              S*DX*DY*1.0 +
     *              (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,nny)
            wk1(nny-2) = wk(i,nny-1)

c-------------RESOLUTION DU SYSTEME------------------------------------
        CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-2)

c-------formation de la solution sur toute la ligne vericale
        do j = 2,nny-1
           temp(i,j) = temp1(j-1)
        enddo
     ENDIF
  ENDDO

c=================pour " i = NNX-1 "===================================
c---------diagonale inférieure "A" -----------------------------------------------------------------------
```

```
      DO j = 2,nny-1
         if (j .eq. 2) then
            A(nnx-1,j) = 0.0
            A1(j-1) = A(nnx-1,j)
         else
            A(nnx-1,j) = - la*(DX*gz)/DY
            A1(j-1) = A(nnx-1,j)
         endif
      ENDDO

c---------diagonale supérieure "C" ---------------------------------------------------------------------
      DO j = 2,nny-2
         if (j .eq. 2) then
            C(nnx-1,j) = - la*(DX*gz)/DY
            C1(j-1) = C(nnx-1,j)
         else
            C(nnx-1,j) = - la*(DX*gz)/DY
            C1(j-1) = C(nnx-1,j)
         endif
      ENDDO
            C(nnx-1,nny-1) = 0.0
            C1(nny-2) = C(nnx-1,nny-1)

c----------diagonale principale "B" --------------------------------------------------------------------
      DO j = 2,nny-1
         if (j .eq. 2) then
            B(nnx-1,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY
            B1(j-1) = B(nnx-1,j)
         else
            B(nnx-1,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY
            B1(j-1) = B(nnx-1,j)
         endif
      ENDDO

c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk) -----------------------------------------------
      do j = 2,nny-2
        if (j .eq. 2) then
           wk(nnx-1,j) = (la*(DX*gz)/DY)*temp(nnx-1,j-1) +
     *                   (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-2,j) +
     *               (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx,j) + S*DX*DY*1.0
           wk1(j-1) = wk(nnx-1,j)
        else
           wk(nnx-1,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-2,j) +
     *              (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx,j) + S*DX*DY*1.0

           wk1(j-1) = wk(nnx-1,j)
        endif
      enddo
      wk(nnx-1,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-2,nny-1) +
     *                (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx,nny-1) +
     *                S*DX*DY*1.0 +
```

```
     *                        (la*(DX*gz)/DY)*temp(nnx-1,nny)
          wk1(nny-2) = wk(nnx-1,nny-1)

c-------------RESOLUTION DU SYSTEME---------------------------------------------------------
            CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-2)

c-------formation de la solution finale sur toute la ligne vericale
            do j = 2,nny-1
            temp(i,j)=temp1(j-1)
            enddo

c--------verifier le critere de convergeance ---------------------------------------------------------
         do i=2,nnx-1
            do j = 2,nny-1
              dif(i,j) = abs(100.0*(temp(i,j) - temp2(i,j))/temp(i,j))
            enddo
         enddo
            difmax = dif(2,2)
         do i=2,nnx - 1
            do j=2,nny-1
               if(dif(i,j) .GT. difmax) then
                  difmax = dif(i,j)
               else
               endif
            enddo
         enddo
         write(*,*)'iter, difmax, err', k, difmax, err
         write(*,*)'iter, difmax, err', difmax, err
           if (difmax .LE. err) then
            write(*,*)'sortie par critere de convergence, k=',k
            goto 100
          else
          endif

c--------initialisation de la température du pas précedente-------------------------------------------
         do i = 2, nnx-1
            do j = 2, nny-1
            temp2(i,j) = temp(i,j)
            enddo
         enddo
c-------FIN BOUCLE D'ITERATION---------------------------------------------------------------
      ENDDO
100   CONTINUE

C=========== ECRIRE la SOLUTION ================================

       OPEN(20,file='sol2Ds2.prn')
         do i=1,nnx
            write(20,101)(temp(i,j),j=1,nny)
         enddo
       CLOSE(20)
101    format(26(1x,F7.2))
```

```
      STOP
      END
```

G.6 Programme de calcul (l'exemple 1, paragraphe 4.4.2)

program THER2Di1

```
*=======================================================================*
*   RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONDUCTION THERMIQUE 2D                 *
*   INSTATIONNAIRE (methode des volumes finis - schéma totalement implicite) *
*                                                                       *
*     EQUATION RESOLUE  : dT/dt = alfa(div k(grad T)) + S               *
*     Domaine d'analyse : Réctangle - dimensions L/H                    *
*                                                                       *
*     VARIABLES D'ENTRÉE :                                              *
*       NNX   : nombre de noeuds sur la direction X                     *
*       NNY   : nombre de noeuds sur la direction Y                     *
*       L       : largueur du domaine de calcul
           *
*       H       : hauteur du domaine de calcul                          *
*       S       : terme source                                          *
*                                                                       *
*     CONDITIONS AUX LIMITES :                                          *
*       Dirichlet suivant toutes les frontières (W, E, S, N)            *
*       T(0,y) = 300 ; T(L,y) = 300 ; T(x,0) = 300 ; T(x,H) = 1000      *
*                                                                       *
*      CONDITIONS INITIALES :                                           *
*     T(x,y,0) = 300 K ; T(x,H,0)=1000 K                                *
*                                                                       *
*     VARIABLES DE SORTIE :                                             *
*       TEMP  : température T(x,y,t)                                    *
*                                                                       *
*      AUTEUR  : Ioan POPA, Décembre 2001                               *
*                                     Copyright © 2001, Ioan POPA       *
*=======================================================================*
      PARAMETER (nnx = 21, nny = 26, nit = 10000, npt = 1000)
      DOUBLE PRECISION TEMP(nnx, nny), AX(nnx, nny), AY(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION TEMP2(nnx, nny),dif(nnx, nny), TEMP0(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION A(nnx, nny), B(nnx, nny), C(nnx, nny), WK(nnx, nny)
      DOUBLE PRECISION A1(nny), B1(nny), C1(nny), WK1(nny), temp1(nny)
      DOUBLE PRECISION DX, DY, TB, L, H, la, gz,TFN
      DOUBLE PRECISION S, alfa, RCP, DT, difmax, err
      DATA TB/300.0/,L/0.04/,H/0.05/,la/10.0/,gz/1.0/,TFN/1000.0/
      DATA S/40000000.0/,RCP/1.0D06/,DT/0.01/,err/0.0001/

c----- calcul des pas dans l'espace (DX) et (DY)-----------------------------------------------------
      DX = L/(NNX - 1)
      DY = H/(NNY - 1)
      write (*,*)'DX = ', dx
      write (*,*)'DY = ', dy
      write (*,*)'DT = ', dt
```

```
c-------calcul de la difusibilité thermique ----------------------------------------------------------------
      alfa = la/RCP

C--------CONDITION INITIALE -------------------------------------------------------------------------
      DO i=1,nnx
         DO j=1,nny
            temp(i,j) = 300.0
            temp2(i,j) = 300.0
            temp0(i,j) =300.0
         ENDDO
      ENDDO

c---------CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES---------------------------------------------

c---------------frontière NORTH----------------------------------------------------------------------------
      DO i=1,nnx
         temp(i,nny) = TFN
         temp2(i,nny) = TFN
      ENDDO

c---------------frontière SOUTH----------------------------------------------------------------------------
      DO i=1,nnx
         temp(i,1) = TB
         temp2(i,1) = TB
      ENDDO

c---------------frontière WEST-----------------------------------------------------------------------------
      DO j=1,nny-1
         temp(1,j) = TB
         temp2(1,j) = TB
      ENDDO

c---------------frontière EAST-----------------------------------------------------------------------------
      DO j=1,nny-1
          temp(nnx,j) = TB
          temp2(nnx,j) = TB
      ENDDO

c-----------------calcul du coefficient AP0------------------------------------------------------------
      ap0 = RCP*DX*DY/DT

C+++++++++++++ BOUCLE D'ITERATION DANS LE TEMPS +++++++++++++++++
      DO kk = 1,npt
      write(*,*)'kk =' , kk

C============= BOUCLE D'ITERATION DANS L'ESPACE==================
      DO k = 1, nit
      write(*,*)'k = ', k

c-----formation des vecteurs des diagonales ---------------------------------------------------------
      DO i = 2,NNX-2
         IF (i .EQ. 2) THEN

c---------diagonale inférieure "A" -----------------------------------------------------------------------
```

```
          DO j = 2, nny-1
             if (j .eq. 2) then
                A(i,j) = 0.0
                A1(j-1) = A(i,j)
             else
                A(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                A1(j-1) = A(i,j)
             endif
          ENDDO
c---------diagonale supérieure "C" --------------------------------------------------------------------
          DO j=2,nny-2
             if (j .eq. 2) then
                C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                C1(j-1) = C(i, j)
             else
                C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                C1(j-1) = C(i, j)
             endif
          ENDDO
                C(i,nny-1) = 0.0
                C1(nny-2) = C(i, nny-1)
c----------diagonale principale "B" -------------------------------------------------------------------
          DO j=2,nny-1
             if (j .eq.2) then
                B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY+ap0
                B1(j-1) =B(i,j)
             else
                B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY+ap0
                B1(j-1) = B(i,j)
             endif
          ENDDO
c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk)----------------------------------------------
          DO j = 2, nny-2
             if (j .eq. 2) then
             wk(i,j) = (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,j-1) +
   *                  (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
   *                  (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1,j) + S*DX*DY*1.0 +
   *                  ap0*temp0(i,j)
             wk1(j-1) = wk(i,j)
             else
             wk(i,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
   *                 (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1,j) + S*DX*DY*1.0 +
   *                  ap0*temp0(i,j)
             wk1(j-1) = wk(i,j)
             endif
          ENDDO
             wk(i,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,nny-1) +
   *                      (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1,nny-1) +
   *                      S*DX*DY*1.0 + ap0*temp0(i,nny-1) +
```

```
     *                      (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,nny)
              wk1(nny-2) = wk(i,nny-1)
c-------------RESOLUTION DU SYSTEME-----------------------------------------------------------
           CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-2)
c-------formation de la solution finale sur toute la ligne verticale -----------------------------------
           do j = 2,nny-1
                temp(i,j)=temp1(j-1)
           enddo
         ELSE
c---------diagonale inférieure  "A"--------------------------------------------------------------------
           DO j = 2, nny-1
              if (j .eq. 2) then
                 A(i,j) = 0.0
                 A1(j-1) = A(i,j)
              else
                 A(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                 A1(j-1) = A(i,j)
              endif
           ENDDO
c---------diagonale supérieure  "C"------------------------------------
           DO j = 2,nny-2
              if (j .eq. 2) then
                 C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                 C1(j-1) = C(i,j)
              else
                 C(i,j) = - la*(DX*gz)/DY
                 C1(j-1) = C(i,j)
              endif
           ENDDO
                 C(i,nny-1) = 0.0
                 C1(nny-2) = C(i,nny-1)
c----------diagonale principale "B"-------------------------------------------------------------------
           DO j = 2,nny-1
              if (j .eq.2) then
                 B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY+ap0
                 B1(j-1) = B(i,j)
              else
                 B(i,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY+ap0
                 B1(j-1) = B(i,j)
              endif
           ENDDO
c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk)----------------------------------------------
           DO j = 2,nny-2
             if (j .eq. 2) then
               wk(i,j) = (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,j-1) +
     *                   (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
     *                   (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1,j) + S*DX*DY*1.0+
```

```
     *                 ap0*temp0(i,j)
              wk1(j-1) = wk(i,j)
            else
              wk(i,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
     *                 (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1,j) + S*DX*DY*1.0+
     *                  ap0*temp0(i,j)
              wk1(j-1) = wk(i,j)
            endif
          ENDDO
             wk(i,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1,nny-1) +
     *                     (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1,nny-1) +
     *                     S*DX*DY*1.0 + ap0*temp0(i,nny-1)+
     *                     (la*(DX*gz)/DY)*temp(i,nny)
              wk1(nny-2) = wk(i,nny-1)
c-------------RESOLUTION DU SYSTEME---------------------------------------------------------
          CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-2)
c-------formation de la solution finale sur toute la ligne vericale ----
          do j = 2,nny-1
          temp(i,j) = temp1(j-1)
          enddo

       ENDIF
    ENDDO

c=================pour " i = NNX-1 ===================================
c---------diagonale inférieure "A" ------------------------------------------------------------------
          DO j = 2,nny-1
             if (j .eq. 2) then
                A(nnx-1,j) = 0.0
                A1(j-1) = A(nnx-1,j)
             else
                A(nnx-1,j) = - la*(DX*gz)/DY
                A1(j-1) = A(nnx-1,j)
             endif
          ENDDO
c---------diagonale supérieure "C" ------------------------------------------------------------------
          DO j = 2, nny-2
             if (j .eq. 2) then
                C(nnx-1,j) = - la*(DX*gz)/DY
                C1(j-1) = C(nnx-1, j)
             else
                C(nnx-1,j) = - la*(DX*gz)/DY
                C1(j-1) = C(nnx-1, j)
             endif
          ENDDO
                C(nnx-1,nny-1) = 0.0
                C1(nny-2) = C(nnx-1, nny-1)
c----------diagonale principale "B" -----------------------------------------------------------------
          DO j = 2, nny-1
```

```
             if (j .eq. 2) then
               B(nnx-1,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY+
     *                    ap0
               B1(j-1) = B(nnx-1,j)
             else
               B(nnx-1,j) = 2.0*la*(DY*gz)/DX + 2.0*la*(DX*gz)/DY+
     *                    ap0
               B1(j-1) = B(nnx-1,j)
             endif
          ENDDO
c-----formation initiale du vecteur du terme libre (wk)-----------------------------------------------
          DO j = 2, nny-2
            if (j .eq. 2) then
               wk(nnx-1,j) = (la*(DX*gz)/DY)*temp(nnx-1,j-1) +
     *                      (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-2,j) +
     *                 (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx,j) + S*DX*DY*1.0+
     *                 ap0*temp0(nnx-1,j)
               wk1(j-1) = wk(nnx-1,j)
            else
               wk(nnx-1,j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-2,j) +
     *                (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx,j) + S*DX*DY*1.0+
     *                 ap0*temp0(nnx-1,j)
                wk1(j-1) = wk(nnx-1,j)
            endif
          ENDDO
          wk(nnx-1,nny-1) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-2,nny-1) +
     *                    (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx,nny-1) +
     *                    S*DX*DY*1.0 + ap0*temp0(nnx-1,nny-1)+
     *                    (la*(DX*gz)/DY)*temp(nnx-1,nny)

               wk1(nny-2) = wk(nnx-1,nny-1)
c-------------RESOLUTION DU SYSTEME ----------------------------------------------------------
          CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny-2)
c-------formation de la solution sur toute la ligne vericale
          do j = 2,nny-1
             temp(i,j) = temp1(j-1)
          enddo
c--------vérifier le critère de convergence -------------------------------------------------------------
        do i = 2, nnx-1
          do j = 2,nny-1
                   dif(i,j) = abs(100.0*(temp(i,j) - temp2(i,j))/temp(i,j))
          enddo
        enddo
        difmax = dif(2,2)
        do i =2, nnx - 1
           do j = 2,nny-1
              if(dif(i,j) .GT. difmax) then
                 difmax = dif(i,j)
```

```
              else
              endif
           enddo
        enddo
        write(*,*)'iter, difmax, err', k, difmax, err
        write(*,*)'iter, difmax, err', difmax, err
        if (difmax .LE. err) then
          write(*,*)'sortie par le critère de la convergeance, k = ', k
          goto 100
        else
        endif
C ==ACTUALISATION - TEMPERATURE DU PAS PRECEDENT DANS l'ESPACE ==
        DO i = 2,nnx-1
           DO j=2,nny-1
              temp2(i, j) = temp(i, j)
           ENDDO
        ENDDO
c-------FIN BOUCLE D'ITERATION dans l'espace "nit" -------------------------------------------
     ENDDO
100   continue
c---------ACTUALISATION - température du pas precedent dans le temps -----------------------
          do i = 1, nnx
           do j = 1, nny
              temp0(i,j) = temp(i,j)
           enddo
          enddo
c-------- FIN BOUCLE D'ITERATION dans le temps "npt" ----------------------------------------
     ENDDO
*=========== ECRIRE la SOLUTION =====================================
          OPEN(20,file='sol2Di1.prn')
                    do i=1,nnx
                              write(20,101)(temp(i, j),j = 1, nny, 2)
                    enddo
          CLOSE(20)
101   format(26(1x, F7.2))
     STOP
     END
```

G.7 Programme de calcul (l'exemple 2, paragraphe 4.4.2)

program THER2Di2

```
*==============================================================*
*    RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONDUCTION THERMIQUE 2D            *
*   INSTATIONNAIRE (méthode des volumes finis, schéma TI)           *
*                                                                   *
*     EQUATION RESOLUE  : dT/dt = alfa(div k(grad T)) + S           *
*     Domaine d'analyse : Réctangle - dimensions L/H                *
*                                                                   *
```

```
*     VARIABLES D'ENTRÉE :                                               *
*       NNX   : nombre de noeuds sur la direction X                      *
*       NNY   : nombre de noeuds sur la direction Y                      *
*       L        : largueur du domaine de calcul
          *
*       H        : hauteur du domaine de calcul                          *
*       S         : terme-source                                         *
*       rho      : densité de masse                                      *
*       cp        : chaleur spécifique                                   *
*       hx        : coefficient de convection                            *
*       Tinf     : température du fluide                                 *
*                                                                        *
*       CONDITIONS AUX LIMITES                                           *
*       Neumann suivant les frontières W et S                            *
*       Convection suivant les frontières E et N                         *
*                                                                        *
*       CONDITIONS INITIALES                                             *
*       T(x,y,0) = 425 K                                                 *
*                                                                        *
*        VARIABLES DE SORTIE                                             *
*       TEMP  : température T(x,y,t)                                     *
*                                                                        *
*        AUTEUR : Ioan POPA, Janvier 2002                                *
*                                   Copyright (C) 2002, Ioan POPA        *
*=======================================================================*

      PARAMETER (nnx = 21, nny = 26, nit = 10000, npt = 1000)
      DOUBLE PRECISION TEMP(nnx,nny), AX(nnx,nny), AY(nnx,nny)
      DOUBLE PRECISION TEMP2(nnx,nny),dif(nnx,nny), TEMP0(nnx,nny)
      DOUBLE PRECISION A(nnx,nny), B(nnx,nny), C(nnx,nny), WK(nnx,nny)
      DOUBLE PRECISION A1(nny), B1(nny), C1(nny), WK1(nny), temp1(nny)
      DOUBLE PRECISION gradx(nnx,nny), grady(nnx,nny), grad(nnx,nny)
      DOUBLE PRECISION DX, DY, L, H, la, gz,Tinf, hx
      DOUBLE PRECISION alfa,RCP
      DATA T0/425.0/,L/0.04/,H/0.05/,la/35.0/,gz/1.0/,Tinf/25.0/
      DATA RCP/3.5D06/,DT/0.1/,err/0.0001/,hx/100.0/

c----- calcul des pas dans l'espace (DX) et (DY) ------------------------------------------------------
      DX = L/(NNX - 1)
      DY = H/(NNY - 1)
      write(*,*)'DX =',dx
      write(*,*)'DY =',dy
      write(*,*)'DT =',dt

c-------calcul de la difusibilité thermique -------------------------------------------------------------
      alfa = la/RCP

C--------CONDITION INITIALE ----------------------------------------------------------------------
        DO i=1,nnx
           DO j = 1, nny
             temp(i, j) = T0
             temp2(i, j) = T0
```

```
          temp0(i, j) = T0
        ENDDO
      ENDDO
c-----------------calcul du coefficient ap0------------------------------------------------------------
     ap0 = RCP*DX*DY/DT
C++++++++++++++ BOUCLE D'ITERATION DANS LE TEMPS ++++++++++++++++++
     DO kk = 1,npt
          write(*,*)'kk = ',kk
C============== BOUCLE D'ITERATION DANS L'ESPACE ==================
     DO k = 1, nit
         write(*,*)'k=',k
c-----formation des vecteurs des diagonales ---------------------------------------------------------
     DO i = 1, NNX-1
        IF (i .EQ. 1) THEN
c---------diagonale inférieure "A" --------------------------------------------------------------------
          DO j=1,nny-1
             if (j .eq. 1) then
                A(i,j) = 0.0
                A1(j) = A(i,j)
             else
                A(i,j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                A1(j) = A(i,j)
             endif
          ENDDO
                A(i,nny) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                A1(nny) = A(i, nny)

c---------diagonale supérieure "C" --------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
             if (j .eq. 1) then
                C(i, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                C1(j) = C(i, j)
             else
                C(i,j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                C1(j) = C(i,j)
             endif
          ENDDO
                C(i,nny) = 0.0
                C1(nny) = C(i,nny)
c----------diagonale principale "B" -------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
             if (j .eq. 1) then
                B(i, j) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY +
    *                  ap0/4.0
                B1(j) =B(i, j)
             else
                B(i, j) = la*(DY*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY +
    *                  la*(DX/2.0*gz)/DY + ap0/2.0
```

```
                B1(j) = B(i,j)
             endif
          ENDDO
                B(i, nny) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY +
     *                   ap0/4.0 + hx*DX/2.0
                B1(nny) = B(i, nny)
c-----------formation du vecteur du terme libre (wk)-----------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
             if (j .eq. 1) then
                wk(i, j) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp2(i+1,j) +
     *                  ap0/4.0*temp0(i, j)
                wk1(j) = wk(i, j)
             else
                wk(i, j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1, j) +
     *                  ap0/2.0*temp0(i,j)
                wk1(j) = wk(i, j)
             endif
          ENDDO
                wk(i,nny) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp2(i+1, nny) +
     *                   ap0/4.0*temp0(i, nny) +
     *                   hx*Tinf*DX/2.0
             wk1(nny) = wk(i, nny)
c-------------RESOLUTION DU SYSTEME---------------------------------------------------------
          CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny)
c-------formation de la solution sur toute la ligne verticale-------------------------------------------
          do j = 1, nny
          temp(i, j)=temp1(j)
          enddo
       ELSE
c--------- i>=2 ---------------------------------------------------------------------------------------
c---------diagonale inférieure  "A"---------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
             if (j .eq. 1) then
                A(i, j) = 0.0
                A1(j) = A(i, j)
             else
                A(i, j) = - la*(DX*gz)/DY
                A1(j) = A(i, j)
             endif
          ENDDO
                A(i, nny) = -la*(DX*gz)/DY
                A1(nny) = A(i, nny)

c---------diagonale supérieure  "C"---------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
             if (j .eq. 1) then
                C(i, j) = - la*(DX*gz)/DY
                C1(j) = C(i, j)
             else
```

```
                C(i, j) = - la*(DX*gz)/DY
                C1(j) = C(i, j)
            endif
        ENDDO
                C(i, nny) = 0.0
                C1(nny) = C(i, nny)

c----------diagonale principale "B"---------------------------------------------------------------------
        DO j = 1,nny-1
            if (j .eq.1) then
                B(i,j) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DY/2.0*gz)/DX +
     *                   la*(DX*gz)/DY + ap0/2.0
                B1(j) = B(i, j)
            else
                B(i, j) = la*(DY*gz)/DX + la*(DY*gz)/DX +
     *                   la*(DX*gz)/DY + la*(DX*gz)/DY + ap0
                B1(j) = B(i, j)
            endif
        ENDDO
              B(i, nny) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DY/2.0*gz)/DX +
     *                     la*(DX*gz)/DY + ap0/2.0 + hx*DX
              B1(nny) = B(i, nny)
c-----formation du vecteur du terme libre (wk)----------------------------------------------------------
        DO j = 1, nny-1
           if (j .eq. 1) then
             wk(i, j) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(i-1,j) +
     *                 (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp2(i+1,j) +
     *                 ap0/2.0*temp0(i,j)
             wk1(j) = wk(i, j)
           else
             wk(i, j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(i-1, j) +
     *                 (la*(DY*gz)/DX)*temp2(i+1, j) +
     *                  ap0*temp0(i, j)
             wk1(j) = wk(i, j)
           endif
        ENDDO
            wk(i, nny) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(i-1, nny) +
     *                  (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp2(i+1, nny) +
     *                   ap0/2.0*temp0(i, nny) +
     *                   hx*(DX*gz)*Tinf
            wk1(nny) = wk(i,nny)
c-------------RESOLUTION DU SYSTEME------------------------------------------------------------
        CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny)
c-------formation de la solution sur toute la ligne vericale -------------------------------------------
        do j = 1, nny
                temp(i, j) = temp1(j)
        enddo
      ENDIF
   ENDDO
```

```
c=================pour " i = NNX =====================================
c---------diagonale inférieure "A" -------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
             if (j .eq. 1) then
                A(nnx, j) = 0.0
                A1(j) = A(nnx, j)
             else
                A(nnx, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                A1(j) = A(nnx, j)
             endif
          ENDDO
               A(nnx, nny) = -la*(DX/2.0*gz)/DY
               A1(nny) = A(nnx, nny)

c---------diagonale supérieure  "C" ------------------------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
             if (j .eq. 1) then
                C(nnx, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                C1(j) = C(nnx, j)
             else
                C(nnx, j) = - la*(DX/2.0*gz)/DY
                C1(j) = C(nnx, j)
             endif
          ENDDO
                C(nnx, nny) = 0.0
                C1(nny) = C(nnx,nny)
c----------diagonale principale "B" ------------------------------------------------------------------
          DO j = 1,nny-1
             if (j .eq. 1) then
               B(nnx, j) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY +
     *                   ap0/4.0 + hx*DY/2.0
               B1(j) = B(nnx, j)
             else
               B(nnx, j) = la*(DY*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY +
     *                   la*(DX/2.0*gz)/DY + ap0/2.0 + hx*(DY*gz)
               B1(j) = B(nnx, j)
             endif
          ENDDO
              B(nnx, nny) = la*(DY/2.0*gz)/DX + la*(DX/2.0*gz)/DY +
     *                     ap0/4.0 + hx*(DX+DY)/2.0
              B1(nny) = B(nnx, nny)
c---------formation du vecteur du terme libre (wk)--------------------------------------------------
          DO j = 1, nny-1
            if (j .eq. 1) then
               wk(nnx, j) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(nnx-1, j) +
     *                 ap0/4.0*temp0(nnx, j) + hx*Tinf*DY/2.0
               wk1(j) = wk(nnx, j)
            else
               wk(nnx, j) = (la*(DY*gz)/DX)*temp(nnx-1, j) +
```

```
     *                    ap0/2.0*temp0(nnx,j) + hx*(DY*gz)*Tinf

                  wk1(j) = wk(nnx, j)
               endif
            ENDDO
            wk(nnx, nny) = (la*(DY/2.0*gz)/DX)*temp(nnx-1, nny) +
     *                ap0/4.0*temp0(nnx, nny) +
     *                hx*Tinf*(DX+DY)/2.0
                 wk1(nny) = wk(nnx,nny)
c-------------RESOLUTION DU SYSTEME ----------------------------------------------------------
            CALL TRIDAG (a1, b1, c1, wk1, temp1, nny)
c-------formation de la solution sur toute la ligne vericale--------------------------------------------
            do j = 1, nny
               temp(i, j)=temp1(j)
            enddo
c--------vérifier le critère de convergence---------------------------------------------------------------
         do i = 1, nnx
           do j = 1, nny
                 dif(i, j) = abs(100.0*(temp(i, j) - temp2(i, j))/temp(i, j))
           enddo
         enddo

         difmax = dif(1,1)
         do i = 1, nnx
            do j=1, nny
               if(dif(i, j) .GT. difmax) then
                  difmax = dif(i, j)
               else
               endif
            enddo
         enddo
         if (difmax .LE. err) then
           write(*,*)'sortie par le critère de la convergeance, k=', k
           goto 100
         else
         endif
C ===ACTUALISATION - TEMPERATURE DU PAS PRECEDENT DANS L'ESPACE ==
         DO i = 1, nnx
            DO j = 1, nny
               temp2(i, j) = temp(i, j)
            ENDDO
         ENDDO
c-------FIN BOUCLE D'ITERATION dans l'espace "nit" ------------------------------------------------
      ENDDO
100   continue
c---------ACTUALISATION - température du pas precedent dans le temps -----------------------

         do i = 1, nnx
```

```
            do j = 1, nny
               temp0(i, j) = temp(i, j)
            enddo
         enddo
c-------- FIN BOUCLE D'ITERATION dans le temps "npt" ----------------------------------------
      ENDDO
*=========== ECRIRE la SOLUTION ==================================
c----------température--------------------------------------------------------------------------------------
       OPEN(20,file = 'sol2Di2.prn')
         do i = 1, nnx
           write(20,101)(temp(i, j),j = 1, nny)
         enddo
       CLOSE(20)
101   format(26(1x, F7.3))
110   format(26(1x, F8.4))
      STOP
      END
```

G.8 Programme de calcul (l'équation 5.77 – Exemple 5.1, paragraphe 5.2.10)

program CVDIF_DC

```
*==============================================================*
*     RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONVECTION/DIFFUSION 1D               *
*     STATIONNAIRE  - méthode des volumes finis (différences centrales) -     *
*                                                                            *
*     EQUATION RESOLUE : div(rho*uv*Phi) = div (gam*(grad Phi))            *
*                                                                            *
*     VARIABLES D'ENTRÉE:                                                    *
*       gam :  diffusion (conductivité themique)                             *
*       RHO:  densité de masse                                               *
*       uv    :  vitesse                                                     *
*       NN   :  le nombre de noeuds                                          *
*       L      :  longeur du domaine de calcul                               *
*       TA   :  condition Dirichlet                                          *
*       TB   :  condition Dirichlet                                          *
*                                                                            *
*     CONDITIONS AUX LIMITES :                                               *
*       Dirichlet à x = 0 et Dirichlet à x = L                               *
*                                                                            *
*      VARIABLES DE SORTIE :                                                 *
*       TEMP :   température Phi(x)                                          *
*                                                                            *
*     AUTEUR  : I. POPA    Février 2001                                      *
*                                          Copyright © Ioan POPA, 2001       *
*==============================================================*
      PARAMETER (nn = 21)
      DOUBLE PRECISION TEMP1(nn), AX(nn),TEMP(nn)
      DOUBLE PRECISION A(nn), B(nn), C(nn), WK(nn)
      DOUBLE PRECISION DX, L,TA,TB, GAM, rho, uv
      DATA L/1.0/,gam/0.1/,rho/1.0/,uv/2.5/
```

```
      DATA TA/1.0/,TB/0.0/
c----------calcul du pas dans l'espace (DX)-----------------------------------------------------------
      DX = L/(nn-1)
      write(*,*)'DX',dx
C-----------INITIALISATION - TEMPERATURE AUX NOEUDS--------------------------------
          DO i=2,nn-1
             temp(i)=0.01
          ENDDO
             temp(1)=TA
             temp(nn)=TB
             temp1(1)=TA
             temp1(nn)=TB
C========= FORMATION DES DIAGONALES =============================
c--------- DIAGONALE INFÉRIEURE (A)---------------------------------------------------------
           DO i = 2,nn-1
             if(i .eq. 2) then
                A(i-1) = 0.0
             else
                A(i-1) = -((gam/DX)+(rho*uv)/2.0)
             endif
           ENDDO
c---------- DIAGONALE SUPÉRIEURE -------------------------------------------------------------
              DO i = 2,nn-2
                C(i-1) = -((gam/DX)-(rho*uv)/2.0)
              ENDDO
                C(nn-2)=0.0
c-------------DIAGONALE PRINCIPALE

         DO i = 2,nn-1
           B(i-1) = (gam/DX)+(rho*uv)/2.0 + (gam/DX)-(rho*uv)/2.0
     *              +(rho*uv-rho*uv)
         ENDDO
c------------TERME LIBRE (WK)------------------------------------------------------------------
         DO j=2,nn-2
           if(j.eq.2) then
             wk(j-1) = TA*(gam/DX + rho*uv/2.0)
           else
             wk(j-1) = 0.0
           endif
         ENDDO
             wk(nn-2) = TB*(gam/DX-rho*uv/2.0)
c-----------RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS-----------------------------------------
         CALL TRIDAG (a, b, c, wk, temp, nn-2)
c--------inclure les points Dirichlet-------------------------------------------------------------------
          do i = 2, nn-1
```

```
          temp1(i) = temp(i-1)
        enddo
c--------- ECRIRE la solution ---------------------------------------------------------------------------
       open(20,file = 'solcvddc.prn')
       do j = 1, nn
         write(20,110)dx*(j-1), temp1(j)
       enddo
       close(20)
110   format(2x, f4.2, 2x, f7.3)
      END
```

G.9 Programme de calcul (l'équation 5.77 – Exemple 5.2, paragraphe 5.2.10)

program CVDIF_UW

```
*=================================================================*
*     RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONVECTION/DIFFUSION 1D          *
*     STATIONNAIRE   - méthode des volumes finis (schéma UPWIND) -  *
*                                                                  *
*     EQUATION RESOLUE : div(rho*uv*Phi) = div (gam*(grad Phi))    *
*                                                                  *
*     VARIABLES D'ENTRÉE:                                          *
*       gam :   diffusion (conductivité themique)                  *
*       RHO:   densité de masse                                    *
*       uv    :   vitesse                                          *
*       NN  :    nombre de noeuds                                  *
*       L     :    longeur du domaine de calcul                    *
*       TA  :    condition Dirichlet                               *
*       TB  :    condition Dirichlet                               *
*                                                                  *
*     CONDITIONS AUX LIMITES :                                     *
*       Dirichlet à x=0 et Dirichlet à x=L                         *
*                                                                  *
*     VARIABLES DE SORTIE:                                         *
*       TEMP  : température Phi(x)                                 *
*                                                                  *
*     AUTEUR  : I. POPA, Février 2001                              *
*                                  Copyright © Ioan POPA, 2001     *
*=================================================================*
      PARAMETER (nn = 21)
      DOUBLE PRECISION TEMP1(nn), TEMP(nn)
      DOUBLE PRECISION A(nn), B(nn), C(nn), WK(nn)
      DOUBLE PRECISION DX, L, TA, TB, GAMA, rho, uv, Dw, De, Fw, Fe
      DATA L/1.0/,gama/0.1/,rho/1.0/,uv/2.5/
      DATA TA/1.0/,TB/0.0/
c----- calcul du pas dans l'espace (DX)-----------------------------------------------------------------
      DX = L/(nn-1)
      write (*,*)'DX', dx
C---------INITIALISATION - TEMPERATURE AUX NOEUDS----------------------------------
```

```
c---------ET CONDITIONS AUX LIMITES
          DO i =2, nn-1
              temp(i) = 0.01
          ENDDO
              temp(1) = TA
              temp(nn) = TB
              temp1(1) = TA
              temp1(nn) = TB
c--------calcul des coefficients-----------------------------------------------------------------------------
          Dw = gama/DX
          De = gama/DX
          Fw = rho*uv
          Fe = rho*uv
C========= FORMATION DES DIAGONALES===============================
c--------- DIAGONALE INFÉRIEURE (A)----------------------------------------------------------------

            DO i=2,nn-1
              if(i .eq. 2) then
                  A(i-1) = 0.0
              else
                  A(i-1) = - (Dw + DMAX1(Fw,0))
              endif
            ENDDO
c---------- DIAGONALE SUPÉRIEURE--------------------------------------------------------------

               DO i = 2,nn-2
                  C(i-1) = - (De + DMAX1(-Fe,0))
               ENDDO
                  C(nn-2)=0.0
c-------------DIAGONALE PRINCIPALE--------------------------------------------------------------

         DO i = 2,nn-1
            B(i-1) = (Dw + DMAX1(Fw,0)) + (De + DMAX1(-Fe,0)) + (Fe-Fw)
         ENDDO
c------------TERME LIBRE (WK)-----------------------------------------------------------------------

         DO j = 2,nn-2
            if(j.eq.2) then
              wk(j-1) = TA*(Dw + DMAX1(Fw,0))
            else
              wk(j-1) = 0.0
            endif
         ENDDO
              wk(nn-2) = TB*(De + DMAX1(-Fe,0))
c---------RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS-------------------------------------------

         CALL TRIDAG (a, b, c, wk, temp, nn-2)

c---- inclure les points Dirichlet ------------------------------------------------------------------------
          do i =2, nn-1
              temp1(i) = temp(i-1)
```

```
          enddo
  C--------------ECRIRE la solution ---------------------------------------------------------------------
         open (20,file = 'solcvduw.prn')
          do j = 1, nn
            write (20,110)dx*(j-1), temp1(j)
          enddo
         close(20)
110   format(2x, f4.2, 2x, f7.3)
      END
```

G.10 Programme de calcul (l’équation 5.77 – Exemple 5.3, paragraphe 5.2.10)

program CVDIF_HYB

```
*=======================================================================*
*     RESOLUTION DE L'EQUATION DE CONVECTION/DIFFUSION 1D              *
*     STATIONNAIRE - méthode des volumes finis (schéma HYBRIDE)        *
*                                                                       *
*     EQUATION RESOLUE : div(rho*uv*Phi) = div (gam*(grad Phi))        *
*                                                                       *
*      VARIABLES D'ENTRÉE:                                              *
*       gam   : diffusion (conductivité themique)                       *
*       RHO  : densité de masse                                         *
*       uv      : vitesse                                               *
*       NN    : nombre de noeuds                                        *
*       L       : longeur du domaine de calcul                          *
*       TA    : condition Dirichlet                                     *
*       TB    : condition Dirichlet                                     *
*                                                                       *
*     CONDITIONS AUX LIMITES                                            *
*       Dirichlet à x = 0 et Dirichlet à x = L                          *
*                                                                       *
*     VARIABLES DE SORTIE:                                              *
*       TEMP  : température Phi(x)                                      *
*                                                                       *
*     AUTEUR  : I. POPA    Février 2001                                 *
*                                         Copyright © Ioan POPA, 2001   *
*=======================================================================*

      PARAMETER (nn = 21)
      DOUBLE PRECISION TEMP1(nn), TEMP(nn)
      DOUBLE PRECISION A(nn), B(nn), C(nn), WK(nn)
      DOUBLE PRECISION DX, L, TA,TB, GAMA, rho, uv, Dw, De, Fw, Fe
      DATA L/1.0/,gama/0.1/,rho/1.0/,uv/2.5/
      DATA TA/1.0/,TB/0.0/
c----- calcul du pas dans l'espace (DX)
      DX = L/(nn-1)
      write(*,*)'DX',dx
C___________INITIALISATION - TEMPERATURE AUX NOEUDS--------------------------
c---------------ET CONDITIONS AUX LIMITES
          DO i = 2, nn-1
```

```
          temp(i)=0.01
        ENDDO
          temp(1)=TA
          temp(nn)=TB
          temp1(1)=TA
          temp1(nn)=TB
c--------calcul des coefficients--------------------------------------------------------------------------
        Dw = gama/DX
        De = gama/DX
        Fw = rho*uv
        Fe = rho*uv
C========= FORMATION DES DIAGONALES==============================
c--------- DIAGONALE INFÉRIEURE (A)-----------------------------------------------------------
         DO i = 2, nn-1
                 if (i .eq. 2) then
                          A(i-1) = 0.0
                 else
                          A(i-1) = - DMAX1(Fw,Dw+Fw/2.0,0.0)
                 endif
         ENDDO
c---------- DIAGONALE SUPÉRIEURE ---------------------------------------------------------------
         DO i = 2,nn-2
          C(i-1) = - DMAX1(-Fe,De-Fe/2.0,0.0)
         ENDDO
          C(nn-2)=0.0
c-------------DIAGONALE PRINCIPALE-------------------------------------------------------------
       DO i = 2, nn-1
         B(i-1) = DMAX1(Fw,Dw+Fw/2.0,0.0) + DMAX1(-Fe,De-Fe/2.0,0.0)
     *           + (Fe-Fw)
       ENDDO
c------------TERME LIBRE (WK)-----------------------------------------------------------------------
       DO j = 2, nn-2
         if (j.eq.2) then
          wk(j-1) = TA * DMAX1(Fw,Dw+Fw/2.0,0.0)
         else
          wk(j-1) = 0.0
         endif
       ENDDO
          wk (nn-2) = TB * DMAX1(-Fe,De-Fe/2.0,0.0)
C----------RÉSOLUTION DU SYSTÈME D'EQUATIONS-----------------------------------------
       CALL TRIDAG (a, b, c, wk, temp, nn-2)
c----------inclure les points Dirichlet---------------------------------------------------------------
        do i = 2, nn-1
          temp1(i) = temp(i-1)
        enddo
```

```
C----------ECRIRE la solution--------------------------------------------------------------------------
        open (20,file = 'cvd_hyb.prn')
          do j = 1, nn
                  write (20,110)dx*(j-1),temp1(j)
          enddo
        close (20)
110     format (2x, f4.2, 2x, f7.3)
      END
```

Annexe H

Maillage de type éléments finis

La méthode des volumes finis requiert dans un premier temps une partition du domaine de calcul qui est issue du maillage initial constitué d'éléments finis. Le choix du type de volumes de contrôle n'est pas unique en maillage non structuré et l'on peut en distinguer classiquement aux moins deux: les volumes finis centré aux noeuds du maillage (notés VFCN et constitués de polygones ou polyèdres centrés aux noeuds) (fig. H1) et les volumes finis centrés aux éléments (notés VFCE et qui sont les éléments du maillage initial) (fig.H2).

La formulation centrée aux éléments est essentiellement d'ordre géométrique, puisqu'elle permet de considérer beaucoup plus naturellement (en comparaison avec la formulation VFCN) des couches de matériaux différents ou des surface métaliques par exemple.

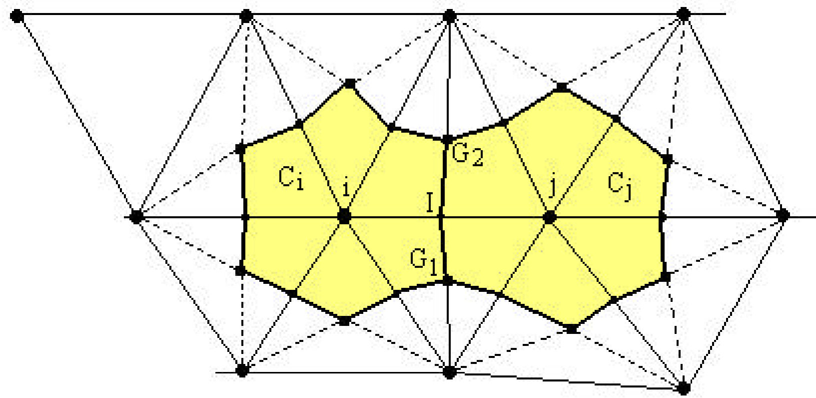


Fig. H1 *Cellule d'intégration* C_i *(méthode VFCN).*

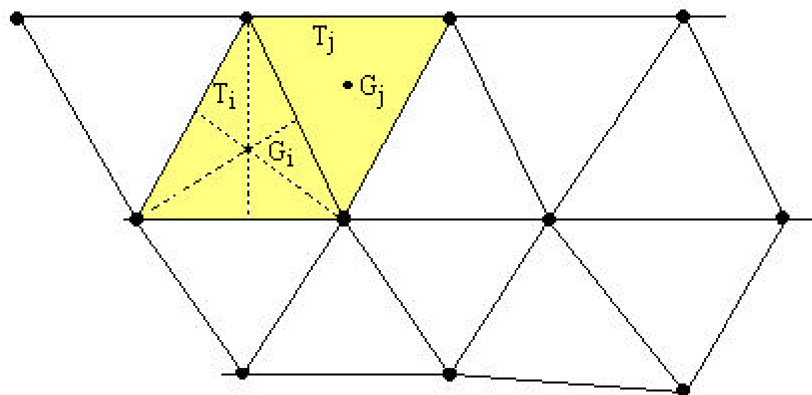


Fig. H2 *Cellule d'intégration* T_i *(méthode VFCE).*

L'idée de base de ces méthodes est de diviser le domaine spatial considéré en cellules appelées volumes finis et de former les équations discrètes à partir de la formulation du système de lois de conservation, écrite pour chaque cellule. À partir d'un même maillage bidimensionnel de type éléments finis triangulaires, plusieurs choix sont alors possibles pour la définition des cellules, tout en gardant le même type de schémas numériques pour la résolution des équations.

L'interface entre deux cellules pour la méthode VFCN est une réunion de deux segments [IG1] et [IG2] (cf. fig. H1). En revanche, pour la méthode VFCE, les interfaces entre deux triangles (ou cellules) sont des segments de la triangulation (fig.H2).

Les valeurs de la variable inconnue Φ sont stockées aux noeuds du maillage (les sommets des triangles) (fig. H3) tandis que le terme source et les propriétés de matériaux sont stockés aux centres de gravité des triangles. Le terme source et les propriétés de matériaux sont supposés constantes sur chaque triangle. Ce choix accepte la discontinuité du terme source et des propriétés de matériaux aux interfaces des volumes de contrôle mais assure la continuité de la variable inconnue Φ.

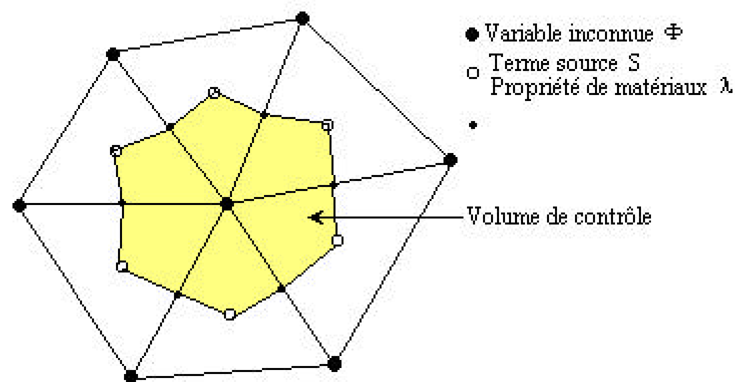


Fig. H3 *Volume de contrôle barycentrique.*

Formulation mathématique

On considère l'équation généralisée suivante (Laplace, Poisson et Helmholtz) :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) + A\Phi + \frac{B}{y^2}\Phi = s . \tag{H.1}$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que la fonction inconnue $\Phi(x, y)$ est linéaire par élément et les valeurs sont stockée aux noeuds. Dans la formulation volumes finis, on considère un volume de contrôle barycentrique présenté à la figure H3. On considère également une configuration axisymétrique.

L'intégration de l'équation H3 sur le volume V de contrôle conduit à :

$$\int_V \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) dV + \int_V A\Phi dV + \int_V \frac{B}{y^2}\Phi dV = \int_V s dV , \tag{H.2}$$

ou, en utilisant la formule de la divergence (ou d'Ostrogradski) on obtient :

$$\int_{SV} \varepsilon \nabla \Phi \cdot \vec{n} dS + \int_{V} A \phi dV + \int_{V} \frac{B}{y^2} \Phi dV = \int_{V} s dV , \qquad \text{(H.3)}$$

où S_V est une surface fermée limitant le volume V .

On suppose que les paramètres e , A et B sont constants par éléments. On peut donc écrire l'équation H3 :

$$\varepsilon \int_{SV} \nabla \Phi \cdot \vec{n} dS + A \int_{V} \phi dV + B \int_{V} \frac{1}{y^2} \Phi dV = S , \qquad \text{(H.4)}$$

où S est le terme source intégré pour chaque noeud,

$$S = \int_{V} s dV$$

Intégrale de surface

Compte tenu du fait que la fonction $\Phi(x, y)$ est linéaire par élément, le terme $\nabla \Phi$ est donc constant. On peut donc écrire :

$$\varepsilon \int_{SV} \nabla \Phi \cdot \vec{n} dS = \varepsilon \nabla \Phi \cdot \int_{SV} \vec{n} dS . \qquad \text{(H.5)}$$

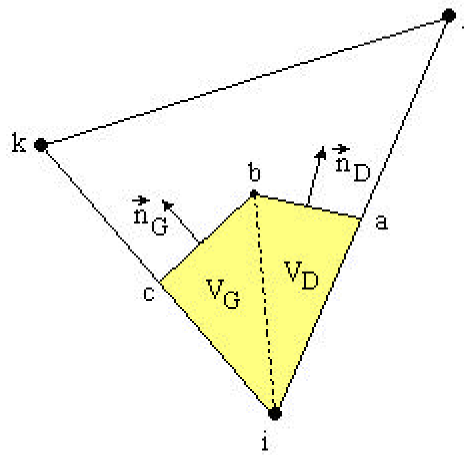


Fig. H4 *Décomposition des normales aux faces*

On peut démontrer que l'intégrale peut être décomposée selon la figure H4 et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{SV} \vec{n} dS = \int_{SV_G} \vec{n} dS + \int_{SV_D} \vec{n} dS &= \bar{y}_D \left(\Delta y_D \vec{i} - \Delta x_D \vec{j} \right) + \bar{y}_G \left(\Delta y_G \vec{i} - \Delta x_G \vec{j} \right) \\ &= \left(\bar{y}_D \Delta y_D + \bar{y}_G \Delta y_G \right) \vec{i} - \left(\bar{y}_D \Delta x_D + \bar{y}_G \Delta x_G \right) \vec{j} \end{aligned} , \qquad \text{(H.6)}$$

avec $\bar{y}_D = (y_a + y_b)/2 \quad \bar{y}_G = (y_b + y_c)/2$.

Le terme $\nabla\Phi$ est calculé en fonction des valeurs nodales Φ_i, Φ_j et Φ_k. Finalement on obtient sur un élément :

$$\int_{SV} \vec{n} dS = \alpha_i \Phi_i + \alpha_j \Phi_j + \alpha_k \Phi_k \,, \tag{H.7}$$

où :

$$\alpha_m = \frac{1}{2A}\left(b_m \bar{y}_y - c_m \bar{y}_x\right).$$

Ce résultat se généralise donc sur le volume de contrôle barycentrique par :

$$\oint_{SV} \vec{n} dS = \sum_{t=1}^{N} \alpha_i \Phi_i + \alpha_j \Phi_j + \alpha_k \Phi_k \,. \tag{H.8}$$

Si on considère une approximation linéaire de la variable inconnue sur un triangle :

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \,, \tag{H.9}$$

x et y représentant la direction axiale et radiale respectivement. En utilisant les valeurs nodales les coefficients a peuvent être déterminés ainsi :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A}\left(a_i \Phi_i + a_j \Phi_j + a_k \Phi_k\right) ; \tag{H.10}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A}\left(b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k\right) ; \tag{H.11}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A}\left(c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k\right), \tag{H.12}$$

où A est l'aire du triangle; i, j, k font référence aux noeuds du triangle; a_p, b_p et c_p ($p = i, j, k$) sont les constantes géométriques.

Finalement on obtient :

$$\Phi(x, y) = N_i(x, y)\Phi_i + N_j(x, y)\Phi_j + N_k(x, y)\Phi_k \,, \tag{H.13}$$

où

$$N_p(x, y) = \frac{1}{2A}\left(a_p + b_p x + c_p y\right) \qquad (p = i, j, k),$$

et

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad b_i = y_j - y_k \quad c_i = -\left(x_j - x_k\right).$$

Pour un volume de contrôle autour du noeud i ayant $t = N$ noeuds voisins, l'équation discrétisé est la suivante :

$$A_i \Phi_i + \sum_{t=1}^{N} A_{vs} \Phi_{vs} = B_i \ . \quad \text{(H.14)}$$

Si on applique l'équation H14 pour tous les noeuds du domaine de calcul on obtient un système d'équations à résoudre :

$$[A] \cdot [\Phi] = [B] . \quad \text{(H.15)}$$

L'avantage de l'utilisation d'un maillage de type éléments finis est qu'on peut traiter les géométries complexes.